

Feuille d'exercices 8 - Ensembles et applications - MPSI 1 - 2006-2007

Exercice 1

Décrire l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a\}))$ où a est un élément.

Exercice 2

Dans cet exercice, A , B et C sont des parties quelconques d'un ensemble E .

1. Montrer que $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$ si et seulement si $B = C$.
2. Résoudre l'équation $X \cup A = B$ dans $\mathcal{P}(E)$.
3. Montrer que $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Exercice 3

Soit E un ensemble.

Montrer qu'il n'existe pas de surjection de E sur $\mathcal{P}(E)$. On pourra considérer l'ensemble $\mathcal{A} = \{x \in E, x \notin f(x)\}$.

Exercice 4

Soient E, F et G trois ensembles. $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$ et $h : G \rightarrow E$ trois applications. On suppose que $h \circ g \circ f$ est injective, que $g \circ f \circ h$ et $f \circ h \circ g$ sont surjectives. Montrer que f , g et h sont bijectives.

Exercice 5

Soient A et B deux parties d'un ensemble E .

On définit l'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \rightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array} .$$

1. Déterminer $\Phi(\emptyset)$, $\Phi(E \setminus (A \cup B))$.
2. Donner une condition sur A et B pour que Φ soit injective.
3. Chercher, s'il existe, un antécédent de (\emptyset, B) .
4. Donner une condition sur A et B pour que Φ soit surjective.

Exercice 6

1. Soient $f : F \rightarrow E$ et $g : G \rightarrow E$ deux applications. Montrer qu'il existe une application $h : G \rightarrow F$ telle que $f \circ h = g$ si et seulement si $g(G) \subset f(F)$.
2. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : E \rightarrow G$ deux applications. Montrer qu'il existe une application $h : F \rightarrow G$ telle que $h \circ f = g$ si et seulement si $(\forall (x, y) \in E^2, f(x) = f(y) \Rightarrow g(x) = g(y))$. Donner une condition pour que h soit unique.

Exercice 7

Soit $f : E \rightarrow F$ une application et G un ensemble qui contient au moins deux éléments.

On définit deux applications f_* et f^* par

$$f_* : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(G, E) & \rightarrow & \mathcal{F}(G, F) \\ \varphi & \mapsto & f \circ \varphi \end{array} \quad \text{et} \quad f^* : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(F, G) & \rightarrow & \mathcal{F}(E, G) \\ \varphi & \mapsto & \varphi \circ f \end{array} .$$

1. Montrer que f injective $\iff f_*$ injective $\iff f^*$ surjective.
2. Montrer que f surjective $\iff f_*$ surjective $\iff f^*$ injective.

Exercice 8

Soient $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto n + 1$ et $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n - 1 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$.

Montrer que $g \circ f = Id_{\mathbb{N}}$ mais que ni f ni g ne sont bijectives de \mathbb{N} sur \mathbb{N} .

Exercice 9

Soit $f : E \rightarrow F$ une application. On définit deux applications ρ et δ par

$$\delta : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \rightarrow & \mathcal{P}(F) \\ A & \mapsto & f(A) \end{array} \quad \text{et} \quad \rho : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(F) & \rightarrow & \mathcal{P}(E) \\ B & \mapsto & f^{-1}(B) \end{array} .$$

1. Montrer que f injective $\iff \delta$ injective $\iff \rho$ surjective.
2. Montrer que f surjective $\iff \delta$ surjective $\iff \rho$ injective.

Exercice 10

Soit $f : \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \ln(x) + \frac{1}{x} \end{array}$.

1. Sur quels intervalles (les plus grands possibles) f est-elle injective.
2. Donner $f([\frac{1}{2}, +\infty[)$, $f(]1, e])$ et $f(]\frac{1}{e}, e])$.

Exercice 11

Soit $\mathcal{A} = \{(-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$.

Montrer que \mathcal{A} est borné et calculer $\sup \mathcal{A}$ et $\inf \mathcal{A}$.

Exercice 12

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application injective. On définit sur E une relation binaire \leq par

$$x \leq y \iff f(x) \leq f(y).$$

Montrer que \leq est une relation d'ordre.

Exercice 13

Soient A et B deux parties de \mathbb{R} qui vérifient

$$\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b \text{ et } \forall \varepsilon > 0, \exists (a, b) \in A \times B, b - a \leq \varepsilon.$$

Montrer que $\sup A = \inf B$.