Feuille d'exercices 6 - Coniques - MPSI 1 - 2006-2007

Exercice 1

1. Soit $(\mathcal{P})$ la parabole d'équation $y = ax^2$ $(a > 0)$. Soit $A(x_0, y_0)$ un point duquel partent deux tangentes à $(\mathcal{P})$ en T_1 et T_2.
   Montrer que les abscisses x_1 et x_2 de T_1 et T_2 sont racines du trinôme $ax^2 - 2ax_0x + y_0$.
2. Montrer que $|x_1 - x_2| = \dfrac{2}{\sqrt{a}}\sqrt{ax_0^2 - y_0}$.
3. Montrer que $\mathcal{A}(AT_1T_2) = \dfrac{2}{\sqrt{a}}(ax_0^2 - y_0)^{\frac{3}{2}}$.
4. Trouver le lieu des points A pour lesquels l'aire du triangle AT_1T_2 est constante.

Exercice 2
Soit (E) l'ellipse paramétrée par

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = a\cos(t) \\ y(t) = b\sin(t) \end{array}\right. .$$

Soit $M_1 \in E$ de paramètre t et M_2 de paramètre $t + \frac{\pi}{2}$.

1. Trouver le lieu du point I milieu du segment $[M_1M_2]$ quand M_1 décrit E.
2. Trouver le lieu du point T point d'intersection des tangentes à (E) en M_1 et M_2 quand M_1 décrit E.
3. Calculer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$.

Exercice 3
Soit (E) l'ellipse paramétrée par

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = a\cos(t) \\ y(t) = b\sin(t) \end{array}\right. .$$

Soit D la tangente à E au point A de paramètre $t = 0$. Soit P un point de E de paramètre t. La tangente à E en P coupe D en Q. On appelle M le symétrique de Q par rapport à P. Trouver le lieu des points M quand P décrit E.

Exercice 4
Soit (P) l'ensemble des points définis par l'équation cartésienne $\frac{3}{4}x^2 - 2x + \frac{1}{4}y^2 - 2\sqrt{3}y - \frac{\sqrt{3}}{2}xy = 0$.

1. Ecrire les formules de changement de repère entre $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $(O, \vec{u}(\theta), \vec{u}(\theta + \frac{\pi}{2}))$.
2. Trouver θ tel que dans le repère $(O, \overrightarrow{u}(\theta), \vec{u}(\theta + \frac{\pi}{2}))$, (P) a une équation de la forme $Y^2 = 2pX$ avec $p > 0$.
3. Représenter (P) et donner les éléments géométriques caractéristiques.

Exercice 5
On considère la courbe H d'équation $x^2 - 4y^2 + 4x + 8y - 4 = 0$. Montrer que H admet un centre de symétrie et déterminer la nature de H. On déterminera une équation réduite de H dans un repère adapté. Déterminer les sommets, foyers, directrices, l'excentricité et les asymptotes de H.

Exercice 6
On considère la courbe E d'équation $5x^2 + y^2 - 10x + 4y + 4 = 0$. Déterminer sa nature et préciser les éléments géométriques. On déterminera une équation réduite dans un repère adapté.

Exercice 7
Soit (H) une hyperbole équilatère, A un point de H. Deux droites perpendiculaires passent par A et coupent H en P et P'. Montrer que (PP') est parallèle à la normale à H en A.

Exercice 8

1. Construire la courbe d'équation polaire $r = 1 + \cos(\theta)$.
2. Montrer que si P et Q sont deux points distincts de la courbe alignés avec O, les tangentes en P et Q sont orthogonales.
3. Déterminer le lieu du point d'intersection de ces tangentes.

Exercice 9

Les trois questions sont indépendantes.

1. Trouver une condition (simple) sur quatre points distincts de la parabole d'équation $y^2 = 2px$ pour qu'ils soient cocycliques.
2. Déterminer le lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes orthogonales à la parabole d'équation $y^2 = 2px$.
3. Montrer qu'un rayon lumineux horizontal qui se reflète sur un miroir parabolique d'équation $y^2 = 2px$ passe par le foyer de cette parabole.