Feuille d'exercices 9 - Ensembles finis, dénombrement - MPSI 1 - 2006-2007

Dans les exercices, pour $n \in \mathbb{N}$ on notera $[1, n]$ l'ensemble $\{p \in \mathbb{N}, p \leq n\}$.

Exercice 1 - Nombres de surjections
Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$. On note S_n^p le nombre de surjections de $[1, n]$ sur $[1, p]$.

1. Calculer S_n^p pour $n < p$. Calculer S_n^1, S_n^2, S_n^n.
2. Calculer S_{p+1}^p.
3. Soit $n > 2$. En considérant la restriction à $[1, n-1]$ d'une surjection de $[1, n]$ dans $[1, p]$, montrer que
$$\forall p \in [2, n-1],\ S_n^p = p(S_{n-1}^p + S_{n-1}^{p-1}).$$
4. Montrer que $S_n^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$.

Exercice 2

1. Montrer que pour tout $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq n$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.
2. On note $S_n^p = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p$. Calculer S_n^1, S_n^2 et S_n^3. On pourra utiliser la question précédente.

Exercice 3

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Caluler $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p+1} \binom{n}{p}$.
2. Calculer $(1+i)^{4n}$ puis en déduire $\displaystyle\sum_{p=0}^{2n} (-1)^p \binom{4n}{2p}$ et $\displaystyle\sum_{p=0}^{2n-1} (-1)^p \binom{4n}{2p+1}$.

Exercice 4
Compter le nombre d'applications strictement croissantes de $[1, p]$ dans $[1, n]$.

Exercice 5
Soit E un ensemble fini à n éléments. Calculer le cardinal de $\mathcal{A} = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2, X \subset Y\}$.

Exercice 6

1. La MPSI4 comporte 45 élèves. Combien y a-t-il de groupes de colle possibles (il faut former 15 groupes de 3 élèves) ?
2. La MPSI5 comporte $n * p$ élèves (n et p deux entiers non nuls). Combien y a-t-ils de groupes de colle possibles (il faut former n groupes de colles de p élèves) ?

Exercice 7
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0,\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ (suite de Fibonacci).
Montrer que
$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2,\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_{p+k} = u_{2n+p}.$$