Feuille d'exercices 26 - Fonctions de deux variables réelles - MPSI 1

Exercice 1
Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f((x,y)) = \dfrac{x^3y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f((0,0)) = (0,0)$.

1. Etudier la continuité de f et de ses dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}((0,0)) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}((0,0))$

Exercice 2
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, et $g(\rho, \theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. On pose $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ le laplacien de f.

1. Calculer $\dfrac{\partial g}{\partial \rho}$, $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial \rho^2}$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$ en fonction des dérivées partielles de f.
2. Exprimer Δf en fonction des dérivées de g.

Exercice 3
Etudier la continuité de la fonction h définie par $h((x,y)) = \dfrac{x^2}{y}$ si $|x| < |y|$, y sinon.

Exercice 4
Etudier en fonction du paramètre α la continuité de la fonction f_α définie par $f_\alpha((x,y)) = \dfrac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, 0 sinon.

Exercice 5
Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes (f est de classe C^1) :

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$. (chercher un changement de variable affine)
2. $x\dfrac{\partial f}{\partial y} - y\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ (utiliser les coordonnées polaires).
3. $\dfrac{\partial f}{\partial x} + x\dfrac{\partial f}{\partial y} = x + y$. (changement de variable $(u, \dfrac{u^2}{2} + v)$)

Exercice 6
Déterminer les extrema des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$:

1. $(x,y) \mapsto e^{x\sin y}$.
2. $(x,y) \mapsto x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$.
3. $(x,y) \mapsto \sin x + \sin y - \sin(x+y)$.

Exercice 7
Etudier la continuité, l'existence et la continuité des dérivées partielles des fonctions suivantes :

1. $\begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
2. $\begin{cases} x^2 & \text{si } |x| > y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 8
Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose

$$g((x,y)) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Exercice 9
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que qu'une application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est homogène de degré α si pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pour tout $\lambda > 0$, $f((\lambda x, \lambda y)) = \lambda^\alpha f((x,y))$.

1. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ une fonction homogène de degré α. Montrer que les dérivées partielles de f sont homogènes de degré $\alpha - 1$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Montrer que f est homogène de degré α si et seulement si

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x\partial_1 f((x,y)) + y\partial_2 f((x,y)) = \alpha f((x,y)).$$