Feuille d'exercices 25 - Géométrie euclidienne - MPSI 1

Dans les exercices, $\mathcal{P}$ est le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $\mathcal{E}$ est l'espace affine euclidien muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Exercice 1
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ d'expression analytique :

1. $\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 4 \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \sqrt{2} - 1 \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y - 1 \end{cases}$

Exercice 2
Soit R une rotation différente de l'identité.

1. Déterminer les droites globalement invariantes par R.
2. En déduire l'ensemble des rotations qui commutent avec R.

Exercice 3
Soit $A(a, 0) \in \mathcal{P}$. Pour tout point M dans $\mathcal{P}$, on définit $M' = f(M)$ de la façon suivante : A, M et M' sont alignés et (MO) est orthogonale à $(M'O)$. Expliciter f en fonction des coordonnées (x, y) de M. Donner son domaine de définition. Montrer que f réalise une bijection entre le demi-disque supérieur de diamètre $[AO]$ et le quart de plan d'équations $x < 0, y > 0$.

Exercice 4
ABC étant un triangle quelconque, on désigne par S la symétrie directe de centre A qui transforme B en C. Soit M un point du cercle circonscrit à ABC et M' son image par S. Montrer que les points M, C et M' sont alignés.

Exercice 5
Soit C un carré et G l'ensemble des isométries du plan qui laissent globalement stable C.

1. Montrer que G est un sous groupe du groupe $Is(\mathcal{P})$.
2. Déterminer G.

Répondre aux mêmes questions avec un rectangle ou un cercle.

Exercice 6
Soit $\vec{v} \in \mathcal{E}$ un vecteur unitaire de coordonnées (α, β, γ) et un réel θ. Montrer que l'application qui à $\vec{x}$ associe

$$\cos\theta[(\vec{v} \wedge \vec{x}) \wedge \vec{v}] + \sin\theta \vec{v} \wedge \vec{x} + (\vec{v}.\vec{x})\vec{v}$$

est la rotation d'angle θ autour de $\vec{v}$.

Exercice 7
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des applications définies analytiquement par :

1. $X' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
2. $X' = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & 1 & 8 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix} X$

Exercice 8
Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Montrer que $A \in SO(3)$ si et seulement si il existe un réel $\lambda \in \left[0, \frac{4}{27}\right]$ tel que

$$(X - a)(X - b)(X - c) = X^3 - X^2 + \lambda.$$

On suppose la condition précédente, on pose $\lambda = \frac{4}{27}\sin^2\varphi$. Déterminer les éléments géométriques de la rotation associée à A.

Exercice 9
Soient f et g deux vissages d'angle différent de π. Montrer que $f \circ g = g \circ f$ si et seulement si ces deux vissages ont même axe. (On pourra étudier $f \circ g \circ f^{-1}$).

Exercice 10
Déterminer l'expression analytique du vissage de vecteur $\vec{V}(1, 1, 0)$, d'axe la droite dirigée par ce vecteur et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 11
On appelle retournement de $\mathcal{E}$ une rotation d'angle π.

1. Soit f une rotation de $\mathcal{E}$. Montrer que f est un retournement si et seulement si il existe $\vec{x} \neq \vec{0}$ tel que $f(\vec{x}) = -\vec{x}$.
2. En déduire que toute rotation de $\mathcal{E}$ est la composée de deux retournements.