

# Feuille d'exercices 24 - Espaces affines - MPSI 1

## Exercice 1 - Théorème de Ménélaus

Soit  $ABC$  un triangle (non plat), et trois points  $P, Q, R$  distincts de  $A, B, C$  tels que  $P \in (BC), Q \in (AC), R \in (AB)$ .  
Montrer que  $P, Q$  et  $R$  sont alignés si et seulement si

$$\frac{\overline{PB} \cdot \overline{QC} \cdot \overline{RA}}{\overline{PC} \cdot \overline{QA} \cdot \overline{PB}} = 1.$$

## Exercice 2 - Théorème de Carathéodory

Soit  $E$  un espace affine de dimension  $n$ , d'origine  $O$  et  $A$  une partie non vide de  $E$ . On note  $\mathcal{C}(A)$  l'enveloppe convexe de  $A$  (l'ensemble des barycentres à coefficients positifs des points de  $A$ ) et  $\Gamma$  l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de  $n+1$  points de  $A$ .

1. Soit  $p \geq n + 1$  et  $x \in \mathcal{C}(A)$  barycentre à coefficients positifs de  $p + 1$  points de  $A : x = \text{bar}\{(x_1, \alpha_1), \dots, (x_{p+1}, \alpha_{p+1})\}$  avec

$$\sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i = 1 \text{ et } \alpha_i \geq 0.$$

(a) Montrer qu'il existe  $\mu_1, \dots, \mu_{p+1}$  non tous nuls dont la somme est nulle et tels que  $\sum_{i=1}^{p+1} \mu_i \overrightarrow{Ox_i} = 0$ .

(b) Montrer l'existence de

$$\frac{\alpha_k}{\mu_k} = \inf \left\{ \frac{\alpha_i}{\mu_i}, \mu_i > 0, 1 \leq i \leq p+1 \right\}.$$

(c) Montrer que  $x$  est barycentre à coefficients positifs de  $p$  points de  $A$ . On pourra poser pour  $i \neq k, \delta_i = \alpha_i - \alpha_k \frac{\mu_i}{\mu_k}$ .

2. Montrer que  $\mathcal{C}(A) = \Gamma$ .

## Exercice 3

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère du plan affine,  $A(1, 0), B(0, 1), C(0, 2)$ . Pour  $m \in \mathbb{R}$ , on définit les droites  $D : y = mx, D' = y = -mx$  puis les points  $M = D \cap (AB)$  et  $M' = D' \cap (AC)$  s'ils existent. Montrer que la droite  $(MM')$  passe par un point fixe (indépendant de  $m$ ) à déterminer.

## Exercice 4 - Droites parallèles ou concourantes

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère du plan affine. On considère les trois droites d'équations  $D : ax + by = c, D' : a'x + b'y = c'$  et  $D'' : a''x + b''y = c''$ .

Montrer que  $D, D'$  et  $D''$  sont parallèles ou concourantes si et seulement si  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$ .

## Exercice 5

Soient  $A_1 = a + F$  et  $A_2 = b + G$  deux sous espaces affines d'un espace affine  $\mathcal{A}$  de direction  $E$  ( $F$  et  $G$  sont deux sev de  $E, a, b \in \mathcal{A}$ ).  
Montrer que

$$A_1 \cap A_2 \neq \emptyset \iff \overrightarrow{ab} \in F + G$$

## Exercice 6

On considère la famille de droites :

$$D_\lambda : \begin{cases} x = \lambda + \lambda^2 z \\ y = \lambda^2 + \lambda z \end{cases}.$$

1. Montrer qu'il existe deux droites horizontales  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  qui rencontrent  $D_\lambda$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

2. Déterminer les équations des deux plans contenant  $M(\lambda, \lambda^2, 0)$  et  $\Delta_1$  ou  $\Delta_2$ .