

Feuille d'exercices 23 - Espaces euclidiens - MPSI 1

Exercice 1

1. Montrer que l'application $(f, g) \mapsto \int_0^\pi e^{-t} f(t)g(t) dt$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}([0, \pi], \mathbb{R})$.
2. Déterminer la projection orthogonale de $t \mapsto \sin(t)$ sur $\text{Vect}(t \mapsto 1, t \mapsto t, t \mapsto t^2)$.
3. Déterminer $\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_0^\pi e^{-t} (\sin t - at^2 - bt - c)^2 dt$.

Exercice 2

Dans \mathbb{R}^4 euclidien, déterminer un système d'équation cartésienne et une base de l'orthogonal de F et la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F dans les cas suivants :

1. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = 0 \text{ et } y + z + t = 0\}$
2. $F = \text{Vect} \{(1, 1, 2, -1), (2, 3, -1, 0), (0, 2, 0, 1)\}$.
3. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y - z = 0\}$.

Exercice 3

Dans \mathbb{R}^5 euclidien, déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à

$$F = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5, x + y + z - t = x - z - 2t + 3u = 0\}.$$

Exercice 4

Soit (e_1, \dots, e_n) une famille de vecteurs unitaires d'un espace vectoriel euclidien tel que

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (x|e_i)^2.$$

1. Montrer que (e_1, \dots, e_n) est une famille orthogonale.
2. Montrer que (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormale de E .

Exercice 5

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme tel que pour tout $x, y \in E$, $(f(x)|y) = (x|f(y))$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E .

1. Montrer que la matrice de f dans la base \mathcal{B} est symétrique.
2. Montrer que $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont supplémentaires orthogonaux dans E .

Exercice 6

Soient f une fonction continue strictement positive sur le segment $[a, b]$. A l'aide d'un produit scalaire judicieusement choisi sur $\mathcal{C}([a, b])$, montrer que

$$\int_a^b f(t) dt \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt \geq (b-a)^2$$

et étudier les cas d'égalité.

Exercice 7 - Matrices de Gram

Soient x_1, \dots, x_p des vecteurs d'un espace euclidien E . On note $G(x_1, \dots, x_p) = ((x_i|x_j))_{1 \leq i, j \leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ la matrice de terme général $(x_i|x_j)$.

1. Montrer que (x_1, \dots, x_p) est une famille libre si et seulement si $G(x_1, \dots, x_p)$ est inversible.
2. On suppose dans la suite que (x_1, \dots, x_p) est une famille libre. Montrer qu'il existe $P \in GL_p(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure inversible telle que $G(x_1, \dots, x_p) = {}^t P P$. En déduire que $\det(G(x_1, \dots, x_p)) > 0$.
Soit $x \in E$ et m_1, \dots, m_{p+1} les cofacteurs de $G(x_1, \dots, x_p, x)$ associés aux indices $(p+1, 1), (p+1, 2), \dots, (p+1, p+1)$. On pose $y = \sum_{j=1}^p (-1)^{p+1+j} m_j x_j + m_{2p+1} x$.
3. Montrer que $y \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_p)^\perp$.
4. Montrer que $\frac{1}{m_{2p+1}} y$ est la projection orthogonale de x sur $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)^\perp$.
5. Montrer que $d(x, \text{Vect}(x_1, \dots, x_p)) = \sqrt{\frac{\det(G(x_1, \dots, x_p, x))}{\det G(x_1, \dots, x_p)}}$.

Exercice 8

On rappelle que la trace d'une matrice carrée est la somme de ses coefficients diagonaux et définit une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle également que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, $\text{Tr}(P^{-1}AP) = \text{Tr}(A)$, $\text{Tr}({}^t A) = \text{Tr}(A)$.

1. Montrer que l'application $(A, B) \mapsto \text{Tr}({}^t AB)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une base orthonormale pour ce produit scalaire.
3. Montrer que l'ensemble des matrices symétriques et antisymétriques sont des supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{Tr}(A) \leq \sqrt{n \text{Tr}({}^t AA)}$.

Exercice 9

1. Montrer que l'application $((x, y, z), (x', y', z')) \mapsto xx' + yy' + zz' - \frac{1}{2}(xy' + yx')$ définit un produit scalaire sur \mathbb{R}^3 . On considère désormais \mathbb{R}^3 munit de ce produit scalaire.
2. Déterminer une base orthonormale de \mathbb{R}^3 .
3. Soit $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer S^2 .
4. Soit $s \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à S . Déterminer $\text{Ker}(s - Id)$, $\text{Ker}(s + Id)$, montrer que ce sont des supplémentaires orthogonaux dans E .
5. Montrer que s est une symétrie orthogonale dont on donnera les éléments géométriques caractéristiques.