

# Feuille d'exercices 21 - Matrices - MPSI 1

## Exercice 1

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ . Montrer que l'équation  $AX = B$  avec  $X, B \in \mathcal{M}_{3,n}(\mathbb{R})$  admet des solutions si et seulement si les colonnes de  $B$  sont en progression arithmétique.

Résoudre  $AX = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ .

## Exercice 2

Soit  $U = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathcal{A} = \{aI_n + bU, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ .

1. Montrer que  $\mathcal{A}$  est un sev et un sous anneau de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
2. Montrer que  $M = aI_n + bU \in \mathcal{A}$  est inversible dans  $\mathcal{A}$  si et seulement si  $b(b + na) \neq 0$  et déterminer  $M^{-1}$ .
3. Montrer que si  $b(b + nb) = 0$ , alors  $M$  n'est pas inversible dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
4. Déterminer les matrices  $M \in \mathcal{A}$  telles que  $M^n = I_n$ .

## Exercice 3

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $A^2 - 3A + 2I_2$ .
2. Montrer que  $A$  est inversible et déterminer son inverse.
3. Pour  $\geq 2$ , déterminer le reste de la division euclidienne de  $X^n$  par  $X^2 - 3X + 2$ .
4. Calculer  $A^n$  pour  $n \in \mathbb{Z}$ .

## Exercice 4

Soit  $f$  l'application linéaire de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans les bases canoniques  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  et  $(f_1, f_2, f_3)$  est

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & -7 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer  $f((x, y, z, t))$  pour  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ .
2. On définit deux bases  $B = (e_1, e_2, 4e_1 + e_2 - 3e_4, -7e_1 + e_3 + 5e_4)$  et  $B' = (4f_1 + 2f_2 + f_3, 5f_1 + f_2 - f_3, f_3)$ . Déterminer la matrice de  $f$  par rapport aux bases  $B$  et  $B'$ .

## Exercice 5

On rappelle que la famille des matrices élémentaires  $E_{i,j}$  forme la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

1. Calculer  $E_{i,j} \cdot E_{k,l}$  pour  $1 \leq i, j, k, l \leq n$ .
2. Déterminer l'ensemble des matrices  $A$  telles que  $\forall b \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AB = BA$ .
3. Montrer que  $I_n + E_{i,j}$  est inversible et déterminer son inverse.

## Exercice 6 - Trace d'une matrice carrée

Pour  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on note  $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$  la trace de  $A$ .

1. Montrer que  $\text{Tr}$  est une forme linéaire de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

2. Montrer que  $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$  et  $\text{Tr}({}^t A) = \text{Tr}(A)$ .

3. Montrer qu'il n'existe pas de matrices  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telles que  $I_n = AB - BA$ .

4. Pour  $1 \leq i, j \leq n, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , déterminer  $\text{Tr}(AE_{i,j})$ .

5. Soit  $\varphi$  une forme linéaire de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Montrer qu'il existe une unique matrice  $A$  telle que  $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \varphi(M) = \text{Tr}(AM)$ .

## Exercice 7

Calculer l'inverse des matrices suivantes :  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  et

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

## Exercice 8

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  par  $a_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}$  pour  $i \leq j$  et 0 sinon.

1. Déterminer l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  dont la matrice dans la base canonique  $(1, X, \dots, X^{n-1})$  est  $A$ .
2. Montrer que  $A$  est inversible et déterminer l'inverse de  $A$ .

## Exercice 9

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$  tel que  $f^{n-1} \neq 0$  et  $f^n = 0$ .

1. Soit  $a \in E$  tel que  $f^{n-1}(a) \neq 0$ . Montrer que la famille  $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$  forme une base de  $E$ .
2. Déterminer les matrices de  $f, f^2, f^3, \dots, f^{n-1}$  dans cette base.
3. Montrer que

$$\{g \in \mathcal{L}(E), f \circ g = g \circ f\} = \text{Vect}\{Id, f, \dots, f^{n-1}\}.$$

## Exercice 10

Déterminer le rang des matrices  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

## Exercice 11

Déterminer en fonction des paramètres le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}.$$

## Exercice 12 - Produit par blocs.

Soit  $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), M' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  telles que

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ et } M' = \begin{pmatrix} A' & C' \\ B' & D' \end{pmatrix}$$

avec  $A \in \mathcal{M}_{s,t}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{s,n-t}(\mathbb{K}), C \in \mathcal{M}_{m-s,t}(\mathbb{K}), D \in \mathcal{M}_{m-s,n-t}(\mathbb{K})$  et  $A' \in \mathcal{M}_{t,r}(\mathbb{K}), B' \in \mathcal{M}_{t,p-r}(\mathbb{K}), C' \in \mathcal{M}_{n-t,r}(\mathbb{K}), D' \in \mathcal{M}_{n-t,p-r}(\mathbb{K})$ .

Montrer que  $M.M' = \begin{pmatrix} A.A' + B.C' & A.B' + B.D' \\ C.A' + D.C' & C.B' + D.D' \end{pmatrix}$ .

Ce résultat se généralise à des matrices par un nombre quelconque de blocs. Retenir qu'on peut effectuer un produit par blocs entre deux matrices lorsque les dimensions le permettent.

**Exercice 13**

Résoudre en fonction du paramètre  $m \in \mathbb{R}$  le système sui-

$$\text{vant : } \begin{cases} x - my + m^2z & = & 2m \\ mx - m^2y + mz & = & 2m \\ mx + y - m^2z & = & 1 - m \end{cases}$$

**Exercice 14**

1. Soit  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Montrer que  $\text{rg } B = 1$  si et seulement si  $\exists L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K}), C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), B = C \times L$ .
2. Soient  $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  et  $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ . Montrer que

$$(CL)^2 = (LC)CL = \text{Tr}(CL)CL.$$

3. Soit  $A = I_n + CL \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Montrer que si  $1 + \text{Tr}(CL) \neq 0$ , alors  $A$  admet un inverse de la forme  $I_n + \alpha CL$  avec  $\alpha \in \mathbb{K}$  à déterminer.
4. Montrer que si  $1 + \text{Tr}(CL) = 0$ , alors  $I_n + CL$  n'est pas inversible. On pourra utiliser une relation entre  $(CL)^2$  et  $CL$ .
5. Soient  $U$  inversible et  $V$  de rang 1 deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Montrer que  $U+V$  est inversible si et seulement si  $\text{Tr}(U^{-1}V) + 1 \neq 0$  et le cas échéant, déterminer l'inverse de  $U + V$ .