

Feuille d'exercices 20 - Taylor - Développements limités - MPSI 1

Exercice 1

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} , de classe C^2 telle que f et f'' sont bornées. Soit $M_0 = \sup_{\mathbb{R}} |f|$ et $P_2 = \sup_{\mathbb{R}} |f''|$.

1. Montrer que $\forall a > 0, |f'(0)| \leq \frac{M_0}{a} + \frac{M_2}{2}a$.
2. Montrer que $\forall a > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq \frac{M_0}{a} + \frac{M_2}{2}a$.
3. Montrer que f' est bornée sur \mathbb{R} et que $\sup_{\mathbb{R}} |f'| \leq \sqrt{2M_0M_2}$.

Exercice 2

Soit f définie par $f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et 0 sinon.

1. Montrer que f admet un DL à l'ordre 2 en zéro que l'on déterminera.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur \mathbb{R} .
3. Montrer que f n'est pas deux fois dérivable en zéro.

Exercice 3

Effectuer un DL en zéro à l'ordre indiqué entre parenthèse des fonctions suivantes :

1. $\frac{\text{Arcsin } x}{\sqrt{1-x^2}}$, (5).
2. $\ln \left(1 + \frac{x^2}{1+x^2} \right)$, (3).
3. $e^x \text{Arctan } x$, (5).
4. $e^{\sin x}$, (3).
5. $\frac{\sin x}{\ln(1+x)}$, (3).

Exercice 4

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

1. $\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$ en 0.
2. $\frac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$ en 0.
3. $\left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\cotan^2 x}$ en 0.
4. $\frac{1}{2(1-\sqrt{x})} + \frac{1}{3(1-x^{\frac{1}{3}})}$ en 1.
5. $x((x^3+x)^{\frac{1}{3}} - (x^3-x)^{\frac{1}{3}})$ en $+\infty$.

Exercice 5 : Développement asymptotique de Arccos en 1.

1. Montrer que $\forall x \in [-1, 1], \text{Arccos } x = 2\text{Arcsin} \sqrt{\frac{1-x}{2}}$.
2. En déduire un développement asymptotique à trois termes de $\text{Arccos } x$ en 1.
3. Déterminer la limite en zéro de $\frac{\text{Arccos}(1-x)}{\sqrt{x}}$.

Exercice 6

Déterminer un développement asymptotique des fonctions suivantes :

1. $x \ln(x+1) - (x+1) \ln x$ en $+\infty$ à une précision de $\frac{1}{x^2}$.

2. $\left(\frac{x+1}{x} \right)^x$ en $+\infty$ à une précision de $\frac{1}{x^2}$.
3. $\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}$ en $+\infty$ à une précision de $\frac{1}{x}$.

Exercice 7

Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = xe^{x^2}$ est bijective et former le DL en 0 à l'ordre 5 de f^{-1} .

Exercice 8

1. Pour $u \neq 0$, simplifier en fonction du signe de u l'expression $\text{Arctan } u + \text{Arctan} \frac{1}{u}$.
2. Déterminer deux termes du développement asymptotique de $\text{Arctan } u$ en $+\infty$.
3. Montrer que l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution notée x_n dans l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi \right[$.
4. Déterminer trois termes du développement asymptotique de la suite (x_n) .

Exercice 9

Etudier les points singuliers de la courbe paramétrée définie par $\begin{cases} x(t) = t - \text{th } t \\ y(t) = \frac{1}{\text{ch } t} \end{cases}$ et dessiner l'allure de la courbe au voisinage de ce point.