Feuille d'exercices 19 - Intégration - MPSI 1

Exercice 1
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_0^1 f = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 2
Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues, f positive.

1. Démontrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\int_a^b f(t)g(t)\,dt = g(c)\int_a^b f(t)\,dt$.
2. Si f ne s'annule pas, montrer que $c \in]a,b[$.
3. Application : Soit f continue au voisinage de 0. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)\,dt$.

Exercice 3 Quelques sommes de Riemann.
Déterminer la limite des suites suivantes :

1. $\left(\sum_{k=n+1}^{pn} \frac{1}{k}\right)$ pour $p \geq 2$.
2. $\left(\frac{1}{n^4}\prod_{k=1}^{2n}(n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}\right)$.
3. $\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 4
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_{[a,b]} f(x)dx = \int_{[a,b]} xf(x)dx = \int_{[a,b]} x^2 f(x)dx = 0$. Montrer que f admet au moins 3 zéros dans $[a,b]$. Généraliser. On pourra considérer les changements de signes de f.

Exercice 5
Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_a^b f(t)\sin(nt)dt$. Montrer que $(I_n) \to 0$.

Exercice 6
Soit $a > 0$, $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(t) > 0$ pour $t \in]0,a]$.

1. Montrer que $\forall x \in [0,a], \displaystyle\int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(u)du = xf(x)$.
2. En déduire que
$$\forall (x,y) \in [0,a]\times[0,f(a)], \int_0^x f(t)dt + \int_0^y f^{-1}(u)du \geq xy.$$

Exercice 7 (Irrationnalité de π)

1. Pour $a, b \in \mathbb{N}^*$, montrer que la fonction polynomiale $P_n(x) = \frac{1}{n!}x^n(bx-a)^n$ et ses dérivées successives prennent des valeurs entières en 0 et en $\frac{a}{b}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^\pi P_n(t)\sin t dt$. Montrer que $(I_n) \to 0$.
3. En supposant $\pi = \frac{a}{b}$, montrer que $I_n \in \mathbb{Z}$. Conclure...

Exercice 8 Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+\cos\theta\cos t}$ pour $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 t}{\cos t}dt$.
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin x dx$.

Exercice 9
Calculer les primitives suivantes sur des intervalles à déterminer :

1. $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}+(x^2+1)^{\frac{1}{3}}}$. (Poser $t = (x^2+1)^{\frac{1}{6}}$.)
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2+\cos x)^2}$.
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+2e^{-x}}$.
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x + \sin 2x}$.
5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+(x)^{\frac{1}{3}}}$.
6. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-1}}{x+1}dx$.

Exercice 10 : Intégrales de Wallis
On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt$.

1. Montrer que la suite (I_n) est monotone.
2. Montrer que nI_nI_{n-1} est indépendant de n et préciser sa valeur.
3. Montrer que $I_{n-1} \sim I_n$ et en déduire un équivalent simple de I_n.
4. Exprimer I_n à l'aide de factorielles suivant la parité de n.
5. La formule de Stirling dit que $n! \sim K\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ où K est une constante. Déterminer K.