Feuille d'exercices 18 - Fractions rationnelles - MPSI 1

Exercice 1
En décomposant X^5+1 suivant les puissances de $(X-2)$ au moyen de la formule de Taylor, décomposer en éléments simples $\dfrac{X^5-1}{(X-2)^4}$.

Exercice 2
Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles

1. $\dfrac{1}{(X^2-1)(X^2+1)^2}$ dans $\mathbb{R}(X)$.
2. $\dfrac{X}{(X^2-1)^2(X^2+1)}$ dans $\mathbb{C}(X)$ puis dans $\mathbb{R}(X)$.
3. $\dfrac{X^{n-1}}{X^n-1}$ dans $\mathbb{C}(X)$.
4. $\dfrac{1}{(X^2+1)(X^2+X+1)}$ dans $\mathbb{C}(X)$ puis $\mathbb{R}(X)$.
5. $\dfrac{1}{(X^2+1)^2-X^2}$ dans $\mathbb{C}(X)$.
6. $\dfrac{(X^2+1)}{(X-1)^2(X^2-8)}$.
7. $\dfrac{2X+1}{(X-1)^2(X-2)^2}$.

Exercice 3
Décomposer en éléments simples $\dfrac{1}{X(X+1)(X+2)}$ et déterminer la limite de $(S_n)=\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}\right)$.

Exercice 4
Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ de degré n. On note $x_1,...,x_n$ les racines de P (éventuellement confondues). Soit y une racine de P' qui n'est pas une racine de P.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{y-x_k}=0$.
2. En remarquant que $\dfrac{1}{y-x_k}=\dfrac{\bar{y}-\bar{x}_k}{|y-x_k|^2}$, montrer que $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{|y-x_k|^2}\right)y=\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{|y-x_k|^2}$.
3. Montrer que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P (barycentre à coefficients positifs des racines x_k).

Exercice 5
Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé, $\alpha\in\mathbb{R}$. On note φ la fonction rationnelle $\dfrac{P'}{P}$.

1. A l'aide d'une décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$, dresser un tableau de variation de φ.
2. Montrer que $P'-\alpha P$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 6
Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé. En considérant la dérivée de la fonction rationnelle $\dfrac{P'}{P}$, montrer que

$$\forall x\in\mathbb{R}, P(x)P''(x)-(P'(x))^2$$

et que cette inégalité est stricte si et seulement si P n'a que des racines simples.