Feuille d'exercices 17 - Polynômes - MPSI 1

Exercice 1
Dans $\mathbb{R}[X]$, on pose $P_n = (X-2)^{2n} + (X-1)^n - 1$. Montrer qu'il existe $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_n = (X-2)(X-1)Q_n$ et déterminer Q_n.

Exercice 2
On définit par récurrence une suite (T_n) de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ par $T_0 = 2, P_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = XT_{n+1} - T_n$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré de T_n et son coefficient dominant.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}^*, T_n\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = z^n + \dfrac{1}{z^n}$.
3. Montrer que $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(2\cos\theta) = 2\cos(n\theta)$.
4. En déduire l'ensemble des racines de T_n.

Exercice 3
Dans cet exercice, on cherche à déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X-1)^3 \mid P-1$ et
$(X+1)^3 \mid P+1$.

1. Déterminer un couple (U_0, V_0) solution de l'équation $U(X-1)^3 + V(X+1)^3 = 2$.
2. Soit (U, V) un couple solution de l'équation ci-dessus. Montrer que $(X-1)^3 \mid (V - V_0)$ et $(X+1)^3 \mid (U - U_0)$.
3. Déterminer l'ensemble des couples solutions de l'équation $U(X-1)^3 + V(X+1)^3 = 2$.
4. Décrire les polynômes de $\mathcal{E}$.

Exercice 4
Soient n et p deux entiers, et $d = n \wedge p$. Montrer que $(X^n - 1) \wedge (X^p - 1) = X^d - 1$. On pourra utiliser l'algorithme d'Euclide après avoir démontré que si $r = n \mod p$, $X^r - 1 = X^n - 1 \mod X^p - 1$.

Exercice 5
Soit $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(\sin aX + \cos a)^n$ par $X^2 + 1$.

Exercice 6
Effectuer la division euclidienne de A par B dans les cas suivants :

1. $A = 4X^3 + X^2, B = X + 1 + i$.
2. $A = 2X^5 - 5X^3 - 8X, B = X + 3$.

Exercice 7
Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $A = X^2 - 2X\cos\theta + 1$ divise $P_n = X^n \sin\theta - X \sin n\theta + \sin(n-1)\theta$. Déterminer le quotient de cette division. On pourra chercher une relation de récurrence vérifiée par ce quotient.

Exercice 8

1. Soit $n \geq 2$. Factoriser $P_n = (X+1)^n - (X-1)^n$ dans $\mathbb{C}[X]$.
2. En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)$ et $\displaystyle\prod_{i=1}^{p} \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)$. On pourra considérer le polynôme P_{2p+1}.

Exercice 9
Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système

$$\left\{\begin{array}{c} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1 \end{array}\right. .$$

On pourra chercher x, y, z comme les racines d'un polynôme unitaire de degré 3 à déterminer.

Exercice 10
Déterminer les polynômes non constants de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X+1)$. On pourra commencer par montrer qu'une racine non nulle de P est de module 1.

Exercice 11

1. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes non constants premiers entre eux. Montrer qu'il existe un unique couple $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $PU + QV = 1$, $d(U) < d(Q)$ et $d(V) < d(P)$.
2. Montrer que P et Q ne sont pas premiers entre eux si et seulement si il existe un couple $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $PU = QV$, $d(U) < d(Q)$, $d(V) < d(P)$, U et V non nuls.

On pourra considérer l'application

$$\Phi : \mathbb{K}_{q-1}[X] \times \mathbb{K}_{p-1}[X] \to \mathbb{K}_{p+q-1}[X]$$

définie par $\Phi(U, V) = PU + QV$ ($p = d(P)$, $q = d(Q)$).

Exercice 12
Soient $a_1, ..., a_n$ n réels distincts deux à deux, $b_1, ..., b_n$ n réels.

1. Pour $i \in \{1, ..., n\}$, on pose $L_i = \displaystyle\prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$. Montrer que la famille $(L_1, ..., L_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
2. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\forall 1 \leq i \leq n, P(a_i) = b_i$.

Exercice 13
Soit $a \in]0, \pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^{2n} - 2\cos a X^n + 1$.

Exercice 14
Soit $n \geq 2$, $a_1 < a_2 < ... < a_n$ n réels, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall\ 1 \leq i \leq n,\ P(a_i) = 0$ et
$\forall\ 1 \leq i \leq n-1, P'\left(\dfrac{a_i + a_{i+1}}{2}\right) = 0$. Montrer que P est un polynôme de degré 2. On pourra raisonner par l'absurde en posant $P(X) = (X - a_1)(X - a_2)Q(X)$ et étudier les racines de Q'.

Exercice 15
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé de degré supérieur ou égal à deux. Montrer que P' est scindé.

Exercice 16
Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

1. $(X^2 - X + 1)^2 + 1$
2. $X^4 + 4X^3 + 8X^2 + 4X + 1$. On cherchera les racines de ce polynôme en montrant que si r est une racine, $r + \dfrac{1}{r}$ est racine d'un polynôme de degré 2 à déterminer.

Exercice 17

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré inférieur ou égal à trois. Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ si et seulement si P n'admet aucune racine dans $\mathbb{K}$.
2. Soit $P = a_n X^n + ... + a_0$ un polynôme à coefficients entiers de degré n. On suppose que $a_0 \neq 0$. Soit $\dfrac{p}{q}$ une racine rationnelle de P écrite sous forme irréductible (p et q premiers entre eux). Montrer que $p\ |a_0$ et $q\ |a_n$.
3. Montrer que $X^3 + 3X - 1$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
4. Factoriser $2X^3 - X^2 - 13X + 5$ dans $\mathbb{Q}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 18
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{K}$. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n tels que $nP(X) = XP'(X) + bP''(X)$.

Exercice 19

1. Soit p un nombre premier, A et B des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On suppose que p divise tous les coefficients de AB. Montrer que p divise tous les coefficients de A ou tous les coefficients de B.
2. Pour A un polynôme à coefficients entiers, on note $c(A)$ le pgcd des coefficients de A. Montrer que $c(AB) = c(A)c(B)$. On pourra considérer $A_1 = \dfrac{1}{c(A)}A$ et $B_1 = \dfrac{1}{c(B)}B$, montrer que $c(A_1A_2) = 1$ et conclure en remarquant que $c(nA) = nc(A)$ si $n \in \mathbb{N}^*$.