Feuille d'exercices 16 - Arithmétique - MPSI 1

Exercice 1

1. Soient a et b deux entiers. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a-b$ divise $a^n - b^n$.
2. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 676|27^{n+1} - 26n - 27$.

Exercice 2
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{Z}\diagdown\{0,1\}$. On suppose que $p|(x^2 - x)$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ p|(x^n - x)$.

Exercice 3
Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$. On définit ainsi les nombres de Fermat.

1. Montrer que $\forall (n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, F_n|F_{n+k} + 2$.
2. Soit m et n deux entiers naturels distincts et $d \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $d|F_n$ et $d|F_m$ alors $d = 1$ et que donc F_n et F_m sont premiers entre eux.

Exercice 4 (Petit théorème de Fermat)

1. Soit p un nombre premier et $k \in [0, p-1]$. Montrer que $p \mid \binom{p}{k}$.
2. Montrer que $\forall a \in \mathbb{N}, p \mid (a+1)^p - a^p - 1$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, p \mid n^p - n$. En déduire que si p est premier avec n, $p \mid n^{p-1} - 1$.
4. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 11 \mid 2^{10n-7} + 3^{5n-2} - 2$.

Exercice 5
Déterminer les couples d'entiers (a,b) tels que $a \wedge b = 13$ et $a + b = 182$.

Exercice 6
Pour $n \in \mathbb{N}$ calculer $n \vee (n+2)$.

Exercice 7

1. Soit $n = \prod_{i=1}^{p} p_i^{\nu_i} \in \mathbb{N}^*$. Exprimer en fonction des entiers ν_i le nombre de diviseurs de n. On note $D(n)$ ce nombre.
2. Montrer que $\prod_{d \mid n} d = n^{\frac{D(n)}{2}}$.

Exercice 8

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et p premier. Montrer que $\nu_p(n) = \sum_{k=1}^{\infty} E\left(\frac{n}{p^k}\right)$.
2. Déterminer le nombre de zéros à la fin de 100 !

Exercice 9

1. Montrer que si p est un nombre premier entre $n+1$ et $2n$, $p \mid \binom{2n}{n}$.
2. Montrer que $\binom{2n}{n} \leq 4^n$.
3. Montrer par récurrence que $\forall n \geq 2,\ \prod_{p \text{ premier}, p \leq n} p \leq 4^{n+1}$. On pourra montrer que si le résultat est vrai au rang n il est vrai aux rangs $2n-1$ et $2n$.