Feuille d'exercices 15 - Dérivabilité, convexité - MPSI 1

Exercice 1
Montrer que le théorème de Rolle ne s'applique pas dans le cadre des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ en considérant la fonction $f : t \mapsto e^{it}$.

Exercice 2
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que f continue en 0, $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(2x) - f(x)}{x} = 0$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{f(x)}{x} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \frac{f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}{\frac{x}{2^k}} + \frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x}$$
2. Montrer que f est dérivable en 0.

Exercice 3
Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

1. $f : \begin{cases} x \mapsto x \sin \dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \mapsto 0 \end{cases}$
2. $g : \begin{cases} x \mapsto x^2 \sin \dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \mapsto 0 \end{cases}$
   On montrera que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que sa dérivée n'est pas continue en 0.

Exercice 4
Trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^1([0,1],[0,1])$ telles que $f \circ f = f$.

Exercice 5

1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^n(I)$ une fonction qui admet $n+1$ zéros distincts dans I. Montrer que $f^{(n)}$ admet un zéro dans I.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$. Montrer que pour tout $x \in [a,b]$, il existe $c_x \in [a,b]$ tel que
$$f(x) = f(a) + (f(b) - f(a))\frac{x-a}{b-a} + f''(c_x)\frac{(x-a)(x-b)}{2}$$
   On pourra considérer la fonction auxiliaire $g : t \mapsto f(t) - f(a) - (f(b) - f(a))\dfrac{t-a}{b-a} - A\dfrac{(t-a)(t-b)}{2}$ en choisissant le réel A pour que g s'annule en x.
3. Soit $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$. On suppose que f admet n zéros distincts dans $[a,b]$: $a_1 = a < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$. Montrer que pour tout $x \in [a,b]$, il existe $c_x \in [a,b]$ tel que $f(x) = \dfrac{f^{(n)}(c_x)}{n!} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (x - a_k)$. On pourra s'inspirer de la question précédente et utiliser le résultat de la question 1.

Exercice 6

1. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs. On appelle moyenne arithmétique le réel $m_a = \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$ et moyenne géométrique le réel $m_g = (a_1.a_2\ldots.a_n)^{\frac{1}{n}}$. En utilisant la concavité de la fonction $\ln$, montrer que $m_g \leq m_a$ et déterminer les cas d'égalité.
2. On appelle moyenne harmonique le réel m_h défini par $\dfrac{1}{m_h} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_i}$. Montrer que $m_h \leq m_g$ et déterminer les cas d'égalité.

Exercice 7
Soit $n > 1$ un entier. Soient $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ $2n$ réels strictement positifs. On se donne un réel $K > 0$, un réel $s > 0$ et on définit des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ en posant pour i entre 1 et n $\lambda_i = K y_i^s$.

1. Soit $p > 1$ réel. Montrer que $x \mapsto x^p$ est une fonction convexe.
2. Préciser K tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i = 1$.
3. En utilisant une inégalité de convexité et la relation $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} (y_i \lambda_i).\left(\frac{x_i}{\lambda_i}\right)$, former une inégalité. Préciser s tel que l'exposant de y_i disparaisse.
4. On définit le nombre q par $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Démontrer l'**inégalité de Hölder** :
$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Exercice 8
Montrer que $\forall \alpha \in]0,1[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$
$$\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \leq (n+1)^\alpha - n^\alpha \leq \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}.$$
Trouver un équivalent simple de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1-\alpha}}$.

Exercice 9
Soit f dérivable sur $[0,1]$, strictement positive sur $]0,1[$ et nulle en 0. Soient α et β deux réels strictement positifs. Montrer

qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $\alpha \dfrac{f'(c)}{f(c)} = \beta \dfrac{f'(1-c)}{f(1-c)}$. On pourra utiliser $(f(x))^\alpha (f(1-x))^\beta$.

Exercice 10

1. Calculer la dérivée n-ième de $x \mapsto x^2(1-x)^n$, de $x \mapsto \cos^3(x)$.
2. Calculer de deux façons différentes la dérivée n-ième de $x \mapsto x^{2n}$. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n}$.

Exercice 11
Soit $a > 0$, f une fonction continue sur $[0,a]$ et dérivable sur $]0,a]$. On suppose que $f(0) = 0$ et que $f(a)f'(a) < 0$. Montrer qu'il existe $c \in]0,a[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 12
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que $\forall x > 0,\ \exists c > 0,\ f(x) - f(-x) = x(f'(c) + f'(-c))$.

Exercice 13

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et strictement croissante. Montrer que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et majorée. Montrer que f est constante.
3. Soit f et g deux fonctions convexes définies sur $\mathbb{R}$. On suppose également g croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe.

Exercice 14
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que $f(0) = 0$. Calculer la limite de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

Exercice 15
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)f'(x) \geq 0$. Montrer que $f^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est un intervalle.