Feuille d'exercices 14 - Espaces vectoriels (suite) - MPSI 1

Exercice 1
Soit E un K-espace vectoriel, u, v, $w \in \mathcal{L}(E)$. Les questions sont indépendantes.

1. Montrer que Ker $(v \circ u) = u^{-1}$(Ker $v \cap$ Ker u).
2. On suppose que $u \circ v = w$, $v \circ w = u$ et $w \circ u = v$. Montrer que u, v et$w$ ont même noyau et même image.
3. Si $u \circ v = v \circ u$, montrer que Ker $u+$Ker $v \subset Ker(v \circ u)$.
4. Si u est surjective, montrer que Im $(v \circ u) =$ Im v.
5. Si $u^2 - 2u + Id = 0$, montrer que $u \in GL(E)$.

Exercice 2
Soit E un K-ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $N_k =$ Ker (u^k) et $I_k =$ Im (u^k) pour $k \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.
2. Montrer que (N_k) est une suite strictement croissante puis stationnaire à un rang r ($\forall k \geq r,\ N_k = N_r$).
3. Montrer que (I_k) est une suite strictement décroissante puis stationnaire à partir du rang r ($\forall k \geq r,\ I_k = I_r$).
4. Montrer que $E = I_r \oplus N_r$.

Exercice 3
Soit E un K-ev et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que $\Phi : (x, y) \mapsto (x + y, x + f(x + y))$ est un automorphisme de $E \times E$.

Exercice 4
Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On définit les vecteurs (v_1, v_2, v_3) par $v_1 = 2e_1 - e_2 + e_3$, $v_2 = e_1 - 2e_2 + e_3$ et $v_3 = e_1 + e_2 - 2e_3$. Montrer que ces trois vecteurs forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$ puis une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5
Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y = t + z = 0\}$.

1. Montrer que F est un sev de $\mathbb{R}^4$.
2. Soit $v_1 = (1, -1, 0, 0)$ et $v_2 = (0, 0, 1, -1)$. Montrer que $F =$ Vect (v_1, v_2).
3. Montrer que (v_1, v_2) est une base de F.

Exercice 6

1. Pour m et n deux entiers naturels non nuls, calculer
$$\int_0^{2\pi} \sin(nt)\sin(mt)dt.$$
2. Montrer que toute sous famille finie de $\mathcal{A} = \{x \mapsto \sin(nx),\ n \in \mathbb{N}^*\}$ est une famille libre.

Exercice 7
Soit E un K-ev et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $\forall x \in E$, $(x, f(x))$ est une famille liée.

1. Montrer que $\forall x \in E,\ \exists \lambda_x \in K,\ f(x) = \lambda_x x$.
2. Soient x et y deux vecteurs linéairement indépendants. Montrer que $\lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y$.
3. Soient x et y deux vecteurs liés. Montrer que $\lambda_x = \lambda_y$.
4. Montrer que $\exists \lambda \in K,\ \forall x \in E,\ \lambda_x = \lambda$.
5. Montrer que f est une homothétie de rapport λ.

Exercice 8
Soit E un K-ev de dimension finie. On considère $\mathcal{C} = \{f \in \mathcal{L}(E), \forall g \in \mathcal{L}(E), f \circ g = g \circ f\}$.

1. Soit $x \in E\diagdown\{0\}$. Soit H un supplémentaire de Vect (x). Justifier l'existence de H.
2. En considérant le projecteur sur Vect (x) parallèlement à H, montrer que $f(x) \in$ Vect (x).
3. En déduire (d'après l'exercice précédent) que f est une homothétie.
4. Montrer que $\mathcal{C} = \{\lambda Id, \lambda \in K\}$.

Exercice 9
Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels ($n \in \mathbb{N}^*$ fixé) . On "rappelle" qu'un polynôme de degré 0 est un polynôme constant non nul et que le polynôme nul a par convention un degré égal à $-\infty$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de dimension $n + 1$ (on rappellera la base canonique de E).
2. Soit $(P_k)_{0\leq k\leq n}$ une famille de polynômes de E tels que $\forall k \in [|0, n|],\ d^oP_k = k$. Montrer que la famille (P_k) forme une base de E.
3. Montrer que la famille $(X^k(1 - X)^{n-k})_{0\leq k\leq n}$ est une base de E.

Exercice 10
Soit $\mathcal{T}_p$ l'ensemble des suites réelles périodiques de période p ($p \in \mathbb{N}^*$ est un entier fixé). Montrer que $\mathcal{T}_p$ est un $\mathbb{R}$ ev de dimension finie, donner sa dimension et une base.

Exercice 11
Soient F et G deux sev d'un K-ev E de dimension finie tels que $\dim F = \dim G$. Montrer que F et G admettent un supplémentaire commun dans E. On pourra dans un premier temps construire un supplémentaire commun à F et G dans $F + G$.