

Feuille d'exercices 13 - Espaces vectoriels - MPSI 1

Joyeux Noël et bonne année 223*3*3

Exercice 1

1. Soient G' et G'' deux sous-groupes d'un groupe G . Montrer que $G' \cup G$ est un groupe si et seulement si $G' \subset G''$ ou $G'' \subset G'$.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un K -espace vectoriel E . Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.
3. Montrer que $F + G = \text{Vect}(F \cup G)$.
4. Soient V_1, V_2, \dots, V_n n s-e-v de E . Montrer que $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n$ est un s-e-v de E si et seulement si l'un des s-e-v V_i contient tous les autres.

Exercice 2

Dans cet exercice, $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. L'ensemble $\{f \in E, f(1) = 1\}$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?
2. Soit $F = \{x \mapsto a \operatorname{ch}(x - b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que sh et ch sont des éléments de $\text{Vect}(F)$ puis que F n'est pas un sous-espace vectoriel de E .

Exercice 3

Soit E un K -espace vectoriel, p et q deux projecteurs.

1. On suppose que $p \circ q = Id_E$. Montrer que $q \circ p$ est un projecteur.
2. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0_{L(E)}$.
3. Montrer que $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} q$ si et seulement si $p = p \circ q$ et $q = q \circ p$.

Exercice 4

Soit E un K -espace vectoriel. Soit U un sous-espace vectoriel de E qui admet deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E , V et W . Soit p le projecteur sur V parallèlement à U . Montrer que p définit un isomorphisme de W sur V .

Exercice 5

1. Soit φ une forme linéaire non nulle sur un K -espace vectoriel E . Montrer qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que $\operatorname{Ker} \varphi$ et $\text{Vect}(\{x_0\})$ sont supplémentaires dans E .
2. Soient φ et ψ deux formes linéaires. Montrer que $\operatorname{Ker} \psi \subset \operatorname{Ker} \varphi \Leftrightarrow \exists \lambda \in K, \varphi = \lambda \psi$.

Exercice 6

Soient F, G et H trois s-e-v d'un K -e-v E .

1. Montrer que $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$.
2. Montrer que $F + (G \cap H) \subset (F + G) \cap (F + H)$.
3. Montrer que $F \cap (G + (F \cap H)) = (F \cap G) + (F \cap H)$.

Exercice 7

Soit E un K -e-v et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f = E \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.
2. Montrer que $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\} \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.

Exercice 8 Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur non nul et qui n'est pas l'identité.

1. Montrer que $Id_E - p$ est un projecteur, que $\operatorname{Ker}(Id_E - p) = \operatorname{Im} p$ et que $Id_E - p$ n'est pas inversible.
2. Soit $\mathcal{P} = \{a.p + b.Id, (a, b) \in K^2\}$. Montrer que \mathcal{P} est un s-e-v de $\mathcal{L}(E)$ et un sous-anneau commutatif de $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$.
3. Montrer que si $\lambda \in K \setminus \{1\}$, $Id_E - \lambda p$ est un automorphisme de E (on cherchera son inverse dans \mathcal{P}).
4. Déterminer les éléments inversibles de l'anneau \mathcal{P} .

Exercice 9 Soit E un K -e-v, a et b deux scalaires distincts. On suppose que $(u - a.Id_E) \circ (u - b.Id_E) = 0_{L(E)}$.

1. Montrer que $p = \frac{1}{b-a}(u - a.Id_E)$ et $q = \frac{1}{a-b}(u - b.Id_E)$ sont deux projecteurs de E .
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u^n = a^n p + b^n q$.
3. En supposant que $ab \neq 0$, exprimer u^n en fonction de p et q pour $n \in \mathbb{Z}$.