

Feuille d'exercices 12 - Groupes, anneaux, corps - MPSI 1

12 décembre 2006

Exercice 1

Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne associative telle que

$$\forall (a, b) \in G^2, \exists (x, y) \in G^2, a = x \cdot b = b \cdot y$$

Montrer que G est un groupe.

Exercice 2

Soient G et G' deux groupes. On définit la loi de composition interne \star sur $G \times G'$ par $(g_1, g'_1) \star (g_2, g'_2) = (g_1 \cdot g_2, g'_1 \cdot g'_2)$. Montrer que $G \times G'$ munit de cette loi de composition interne est un groupe.

Exercice 3

On définit la loi de composition interne \star sur \mathbb{R} par $x \star y = \ln(e^x + e^y)$. Etudier les propriétés de \star .

Exercice 4

Soit $w \in \mathbb{C}$. Montrer que $\Lambda = \{a + bw, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}, +)$.

Exercice 5

Soit G un groupe fini tel que $\forall x \in G, x^2 = 1_G$. Montrer que G est un groupe commutatif. On pourra considérer $(xy)^2$ et simplifier $xy(xy)^{-1}$.

Exercice 6

Soit A et B deux sous-groupes d'un groupe G . On note AB l'ensemble $\{a \cdot b, (a, b) \in A \times B\}$. Montrer que AB est un sous-groupe de G si et seulement si $AB = BA$.

Exercice 7

Pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\beta \in \mathbb{C}$, on note $f_{\alpha, \beta} : \begin{cases} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \alpha z + \beta \end{cases}$.

Montrer que $\{f_{\alpha, \beta}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}\}$ est un sous groupe de $\text{Bij}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

Exercice 8

1. Soit G un groupe et H une partie finie de G non vide et stable. Montrer que H est un sous-groupe de G . On pourra introduire la fonction $\varphi_a : g \mapsto a \cdot g$ pour $a \in H$.
2. Soit A un anneau intègre fini. Montrer que A est un corps.

Exercice 9

Soit G un groupe et $a \in G$. Soit τ_a l'application de G dans G définie par $\tau_a(g) = aga^{-1}$.

1. Vérifier que l'ensemble des automorphismes de G dans lui-même (noté $\text{Aut}(G)$) est un groupe.
2. Montrer que τ_a est un automorphisme de G (appelé automorphisme intérieur).
3. Montrer que l'application τ de G dans le groupe de ses automorphismes définie par $\tau(a) = \tau_a$ est un morphisme de groupe.
4. Déterminer le noyau de τ .

Exercice 10

Soit A un anneau, a un élément de A . On dit que a est nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n = 0$.

1. Montrer que si a est nilpotent, $(1 - a)$ est inversible et calculer son inverse.
2. Montrer que si ab est nilpotent, ba l'est également.

Exercice 11

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ est un anneau et en déterminer les éléments inversibles.
2. Montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}, (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$ est un corps.

Exercice 12

Soit E un ensemble. On définit la loi de composition interne Δ sur $\mathcal{P}(E)$ par $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Montrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau commutatif. Donner ses éléments inversibles.

Exercice 13

On définit la loi de composition interne \star sur \mathbb{R} par $x \star y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.

1. Montrer que (\mathbb{R}, \star) est un groupe.
2. Montrer que φ définie par $\varphi(x) = \sqrt[3]{x}$ est un isomorphisme de groupe de $(\mathbb{R}, +)$ dans (\mathbb{R}, \star) .