Feuille d'exercices 11 - Fonctions continues (suite) - MPSI 1

9 décembre 2006

Exercice 1
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $T > 0$. On suppose que f est T-périodique.

1. Si f possède une limite en $+\infty$, montrer que f est constante.
2. Si f est continue, montrer que f est bornée et atteind ses bornes.
3. Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 2
Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}[$ une fonction continue ayant une limite finie en $+\infty$.

1. Montrer que f est bornée et atteind l'une de ses bornes (f admet un maximum ou un minimum mais pas nécessairement les deux).
2. Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 3
Soit $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue.
On pose $g : x \mapsto \sup\{f(t), t \in]0, x]\}$ et $h : x \mapsto \inf\{f(t), t \in]0, x]\}$.

1. Montrer que f est bornée sur $]0, 1]$ et donc que g et h sont bien définies.
2. Montrer que g est décroissante et que h est croissante.
3. On pose $M = \lim\limits_{x\to 0} g(x)$ et $m = \lim\limits_{x\to 0} h(x)$. Dire pourquoi m et M existent.
4. Montrer (par l'absurde) que $m = M$.
5. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = m = M$ et donc que l'on peut prolonger f par continuité en 0.

Exercice 4
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$.

1. Montrer que si $f([0, 1]) \subset [0, 1]$, alors f admet un point fixe.
2. Montrer que si $[0, 1] \subset f([0, 1])$, alors f admet un point fixe.

On pourra introduire une fonction auxiliaire $\varphi : x \mapsto f(x) - x$ et utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 5
Chercher les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues qui vérifient
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \left\{ \begin{array}{l} f(x)f(y) \geq 0 \\ f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x)f(y)} \end{array} \right. .$$
On commencera par montrer que soit f est nulle soit à valeurs strictement positive et on posera $g = \ln \circ f$.
On cherchera ensuite à déterminer g sur la partie $A = \left\{ \dfrac{p}{2^q}, (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}$ qui est dense dans $\mathbb{R}$ (on pourra raisonner par récurrence sur q).

Exercice 6
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq a|x| + b.$$

Exercice 7
Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x \in [0, 1], f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x).$$

Exercice 8
Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Soient (x_n) et (y_n) deux suites de D. Montrer que
$$(x_n - y_n) \to 0 \Rightarrow (f(x_n) - f(y_n)) \to 0.$$
En déduire que $\varphi : x \mapsto \sin(x^2)$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9
$$\text{Etudier la continuité de } f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{array}{l} x \text{ si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \end{array} \end{array} \right. .$$

Exercice 10
Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue bornée et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $g \circ f$ est uniformément continue sur D.