Feuille d'exercices 10 - Nombres réels - Suites réelles - MPSI 1 - 2006-2007

Exercice 1
Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$.
On suppose que A est majorée et que B est minorée. On note $A - B = \{a - b, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.
Montrer que $A - B$ admet une borne sup et que $\sup(A - B) = \sup A - \inf B$.

Exercice 2 : *un théorème de point fixe.*
Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une application croissante.
Soit $X = \{x \in [0, 1], f(x) \geq x\}$.

1. Montrer que X admet une borne sup.
2. On pose $b = \sup X$. Montrer que $f(b) = b$.

Exercice 3
Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in \mathbb{R},\ E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x) \text{ et } \sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(nx).$$

Exercice 4
Montrer que l'ensemble $X = \left\{\dfrac{p}{2^q}, (p, q) \in \mathbb{Z}^2\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
On pourra s'inspirer largement de la démonstration du cours sur la densité de $\mathbb{Q}$.

Exercice 5
Soit (x_n) et (y_n) deux suites réelles bornées. Montrer que :

$$|\sup x_n - \sup y_n| \leq \sup |x_n - y_n|.$$

Exercice 6 : *théorème de Césaro*

1. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle qui converge vers un réel a. Soit (v_n) la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k}{n}.$$

   Montrer que la suite (v_n) converge vers a.
2. Montrer que la réciproque n'est pas toujours vérifiée.
3. Soit (x_n) une suite telle que $(x_{n+1} - x_n)$ converge vers un réel l. Montrer que la suite $\left(\dfrac{x_n}{n}\right)$ converge vers l.
4. Soit (y_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\left(\dfrac{y_{n+1}}{y_n}\right)$ converge vers un réel m strictement positif. Montrer que la suite $((y_n)^{\frac{1}{n}})$ converge vers m. On pourra utiliser la fonction logarithme.

Exercice 7
On définit la suite (u_n) par $u_0 = \frac{\pi}{4}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 - \cos(u_n)$
Soit $f : x \mapsto 1 - \cos(x)$ et $g : x \mapsto f(x) - x$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, \pi]$
2. Etudier la fonction g sur $[0, \pi]$
3. Montrer que (u_n) est décroissante, et qu'elle converge vers une limite que l'on déterminera.

Exercice 8
On définit la suite (u_n) par $u_0 \in]0,1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2-u_n}$

1. Montrer que u_n existe et que $u_n \in]0,1[$
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \in \left]0, \frac{1}{2-u_0} u_n\right[$
3. Montrer que (u_n) converge et calculer sa limite.

Exercice 9
Soit (S_n) et (S'_n) deux suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \text{ et } S'_n = S_n + \frac{1}{n}.$$

Montrer que (S_n) et (S'_n) sont adjacentes. En déduire que (S_n) converge.
Vérifier à la machine que (S_n) converge vers $\dfrac{\pi^2}{6}$. On notera $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 10
Soit $0 < a < b$ deux réels, (u_n) et (v_n) les deux suites définies par :

$$u_0 = a, v_0 = b, u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n}.$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une limite commune et exprimer cette limite à l'aide de l'unique réel $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ qui vérifie $\cos\alpha = \frac{a}{b}$.
On pourra montrer par récurrence que $(u_n) \leq (v_n)$ puis que (u_n) est croissante tandis que (v_n) est décroissante.

Exercice 11

1. Soit (u_n) une suite réelle telle que $\left(\dfrac{u_n}{1+u_n}\right) \to 0$. Montrer que $(u_n) \to 0$.
2. Même question si on suppose que (u_n) est bornée et $\left(\dfrac{u_n}{1+u_n^2}\right) \to 0$

Exercice 12
Soit (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant :

$$\begin{cases} 0 \leq u_n \leq 1 \\ 0 \leq v_n \leq 1 \\ (u_n v_n) \to 1 \end{cases}$$

Que peut-on dire de (u_n) et (v_n).

Exercice 13
Soit $x \in \mathbb{R}$. Chercher $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} E(kx)$.

Exercice 14
Soit (u_n) une suite définie par $u_0 \in \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 + 1$. Montrer qu'il existe un unique xréel a tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = E(a^{2^n}).$$