Feuille d'exercices 5 - Géométrie dans l'espace - MPSI 1 - 2006-2007

Exercice 1

1. Soient A,B,C et D quatre points de $\mathcal{E}$. Montrer que

$$\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}.$$

2. Soit ABC un triangle, I, J et K les milieux de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Montrer que pour tout point M de $\mathcal{E}$:

$$\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{KC} = \vec{0}.$$

Exercice 2

1. Montrer que pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de $\mathcal{E}$, on a : $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{w}.\vec{u})\vec{v} - (\vec{v}.\vec{u})\vec{w}$. On pourra se placer dans une base adaptée à la situation...
2. En déduire que $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge (\vec{u} \wedge \vec{w}) = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})\vec{u}$.

Exercice 3

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{E}$. Résoudre en $\vec{x}$ l'équation $\vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{v}$. On fera une discussion sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exercice 4

On considère la famille de plans P_m d'équations $m^2x + (2m-1)y + mz = 3$, $m \in \mathbb{R}$.

Déterminer le ou les plans P_m dans chacun des cas suivants :

1. $A(1,1,1) \in P_m$
2. $B(-1,-2,6) \in P_m$
3. $C(-1,0,1) \in P_m$
4. $\vec{u}(1,1,1)$ est dans la direction de P_m
5. $\vec{n}(0,1,0)$ est normal à P_m.

Montrer qu'il existe un unique point R appartenant à rous les plans P_m.

Exercice 5

1. Trouver une équation de la perpendiculaire commune à

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \text{ et } \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x - 2y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

2. Calculer la distance entre $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

Exercice 6

Former une équation cartésienne de la partie de l'espace paramétrée par

$$\begin{cases} x = 2 + s + 2t \\ y = 2 + 2s + t \\ z = 1 - s - t \end{cases} \quad \text{pour } (s,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 7

Déterminer une équation cartésienne de la sphère contenant les cercles d'équations :

$$\left\{\begin{array}{r} x^2+y^2-9=0 \\ z=0 \end{array}\right. \text{ et } \left\{\begin{array}{r} x^2+y^2-25=0 \\ z-2=0 \end{array}\right. .$$

Exercice 8

Soient Δ_1 et Δ_2 deux droites dans le plan d'équation $z=0$ d'équations

$$\begin{array}{l} \Delta_1\colon x\sin\alpha - y\cos\alpha = 0 \\ \Delta_2\colon x\sin\alpha + y\cos\alpha = 0 \end{array}$$

avec $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$. Soit P un point du plan et H_1 et H_2 ses projections orthogonales sur Δ_1 et Δ_2. Soit $\vec{v}$ un vecteur orthogonal au plan, trouver le lieu des points P tels que $\overrightarrow{OP}\wedge\overrightarrow{H_1H_2}=\vec{v}$.

Exercice 9

Calculer la plus petite distance entre la sphère $\mathcal{S}: x^2+y^2+z^2=1$ et le plan $\mathcal{P}: 3x+2y-z=9$. Trouver des équations des deux plans tangeants à $\mathcal{S}$ et parallèles à $\mathcal{P}$.

Exercice 10

Calculer la distance du point $A(1,1,1)$ à la droite

$$D:\left\{\begin{array}{l} x+y+z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{array}\right.$$

Exercice 11

Etudier l'intersection d'un cylindre et d'une sphère centrée sur l'axe du cylindre.