

Feuille d'exercices 4 - Géométrie plane - MPSI 1 - 2006-2007

Exercice 1

1. Soit G le barycentre de la famille de points pondérés $\{(A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$. Montrer que pour tout point M (du plan ou de l'espace) on a la formule suivante (formule de Leibniz)

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2 = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) MG^2 + \sum_{i=1}^n \alpha_i GA_i^2$$

2. Donner la formule dans le cas où G est l'isobarycentre de 2 ou 3 points.

3. Soit k un réel. Décrire l'ensemble des points \mathcal{E}_k des points M du plan qui vérifient $\sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2 = k$ (les α_i sont des réels quelconques). Dans le cas où $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$, on introduira G_1 et G_2 les barycentres des 2 sous-familles des points pondérés par des masses toutes positives ou toutes négatives.

Exercice 2

Soient A, B et C trois points distincts du plan, α_1, α_2 et α_3 , trois réels dont la somme est non nulle et P le barycentre de la famille de points pondérés $\{(A, \alpha_1), (B, \alpha_2), (C, \alpha_3)\}$.

Montrer que P appartient au cercle circonscrit au triangle ABC si et seulement si $\alpha_1 PA^2 + \alpha_2 PB^2 + \alpha_3 PC^2 = 0$. On pourra utiliser la formule de Leibniz (voir l'exercice 1).

Exercice 3

On se donne deux repères orthonormés directs de même origine : $\mathcal{R}_1(O, \vec{i}_1, \vec{j}_1)$ et $\mathcal{R}_2(O, \vec{i}_2, \vec{j}_2)$

1. Rappeler les formules de changement de repère (on introduira un réel θ adapté).

2. Soient trois points M_1, M_2 et M_3 du plan dont les coordonnées dans le repère \mathcal{R}_1 sont (x_i, y_i) pour $i \in \{1, 2, 3\}$. Montrer que l'application Δ définie par $\Delta(M_1, M_2, M_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ est invariante par changement de repère orthonormés directs quand on garde la même origine.

Exercice 4

Soit ABC un triangle, O un point du plan. Les perpendiculaires à (OA) , (OB) et (OC) passant par O coupent (BC) , (CA) et (AB) en A' , B' et C' . Dans un repère orthonormé direct d'origine O , on note (x_1, y_1) , (x_2, y_2) et (x_3, y_3) les coordonnées de A, B et C . On suppose que A', B' et C' sont distincts de A, B et C .

1. Faire une figure et constater que A', B' et C' sont alignés.

2. Montrer en considérant $\frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}}$ que $\frac{A'B}{A'C} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_1 x_3 + y_1 y_3}$

3. En déduire $\frac{B'C}{B'A}$ et $\frac{C'A}{C'B}$ en fonction des coordonnées de A, B et C .

4. Calculer $\frac{A'B \cdot B'C \cdot C'A}{A'C \cdot B'A \cdot C'B}$. Le théorème de Ménelaus nous dit que A', B' et C' sont alignés.

Exercice 5

Soit a un réel non nul. Soit la famille des droites D_λ ayant pour équation

$$(1 - \lambda^2)x + 2\lambda y + (\lambda^2 - 2\lambda - 3)a = 0.$$

1. Pour un point P quelconque, donner le nombre de droites D_λ qui passent par P .
2. Donner le lieu des points par lesquels passent deux droites D_λ orthogonales.

Exercice 6

Soit ABC un triangle. A' , B' et C' trois points distincts de A , B et C sur les droites (BC) , (CA) et (AB) .

1. Montrer que C' est le barycentre de la famille $\{(A, \overrightarrow{C'B}), (B, \overrightarrow{AC'})\}$. En déduire par permutation circulaire des propriétés similaires pour A' et B' . On orientera (AB) , (BC) et (CA) par les vecteurs unitaires $\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}$, $\frac{\overrightarrow{BC}}{BC}$ et $\frac{\overrightarrow{CA}}{CA}$.
2. Donner les coordonnées de A , B et C dans le repère $(A, \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}, \frac{\overrightarrow{AC}}{AC})$.
3. Donner les coordonnées de A' , B' et C' dans le même repère.
4. Montrer que

$$\det(\overrightarrow{B'A'}, \overrightarrow{B'C'}) = \frac{\overline{AB'} \cdot \overline{BC'} \cdot \overline{CA'} - \overline{AC'} \cdot \overline{BA'} \cdot \overline{CB'}}{BC} \det \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}, \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} \right).$$

On pourra utiliser par exemple que $BC = \overline{BC} = \overline{BA'} + \overline{A'C}$ et le même genre de relations pour $AC = \overline{CA}$ et $AB = \overline{AB}$.

5. Donner une condition nécessaire et suffisante en utilisant les mesures algébriques pour que A' , B' et C' soient alignés (voir la question 4 de l'exercice 4).

Exercice 7

Soit ABC un triangle. Montrer que si M est un point du plan, M est le barycentre de la famille

$$\{(A, \det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC})), (B, \det(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA})), (C, \det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}))\}.$$

Si on n'a pas d'idée, on pourra suivre la progression suivante.

1. Montrer que $\det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) + \det(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}) + \det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
2. On pose x et y des réels tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$. Montrer que $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = y \det(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$ et que $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}) = x \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
3. Conclure en montrant que $\overrightarrow{AM} = \frac{\det(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA})\overrightarrow{AB} + \det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})\overrightarrow{AC}}{\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$.

A l'aide de ce résultat, montrer que si O est le centre du cercle inscrit au triangle ABC avec $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$, O est le barycentre de la famille $\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$. On pourra utiliser l'interprétation du déterminant comme une aire...

Exercice 8

Soient trois droites $(AB) : x - 2y + 3 = 0$, $(AC) : 2x - y - 3 = 0$ et $(BC) : x + 2y + 1 = 0$.

1. Trouver les coordonnées des points A , B et C .
2. Trouver les coordonnées de l'orthocentre du triangle ABC .

Exercice 9

Former une équation cartésienne de la droite définie par le paramétrage $\begin{cases} x=1-2t \\ y=2+t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 10

Déterminer des équations cartésiennes des deux bissectrices des droites suivantes : $\mathcal{D}_1 : 3x + 4y - 7 = 0$ et $\mathcal{D}_2 : 5x - 12y + 7 = 0$. Vérifier que ces deux bissectrices sont orthogonales.

Exercice 11

1. Représenter la partie du plan \mathcal{D} définie par l'équation polaire

$$r = \frac{1}{\cos \theta - \sin \theta}.$$

2. En donner une équation cartésienne.
3. Calculer la distance de $M(a, b)$ à \mathcal{D} (a et b sont des réels quelconques).

Exercice 12

Soit C le cercle d'équation $x^2 + 6x + y^2 - 4y + 9 = 0$ (dans un repère direct) et D le secteur délimité par le cercle et ses 2 tangentes issues de l'origine du repère. Représenter D , déterminer des équations pour les 2 tangentes et calculer l'aire de D .