

DS 9

MPSI - Lycée Descartes

11 mars 2007

Avertissement

- La qualité du raisonnement tiendra une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera donc à répondre aux questions en faisant un raisonnement structuré et précis.
- Dans un même exercice, on pourra répondre à une question en admettant les résultats des questions précédentes.
- Si un élève repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie et poursuit l'exercice en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre.
- Vous pourrez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix.
- L'usage de la calculatrice est interdit.

Exercice 1

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer J^2 .
2. On considère l'ensemble \mathcal{E} des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la forme $aI + bJ$ où a et b sont deux réels.
 - (a) Montrer que \mathcal{E} est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$. Donner sa dimension.
 - (b) Montrer que \mathcal{E} est un sous-anneau de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$.
 - (c) On note Ψ l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\rightarrow \mathcal{E} \\ z &\mapsto aI + bJ \text{ si } z = a + ib \end{aligned}$$

Montrer que Ψ est un isomorphisme d'espaces vectoriels et que

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad \Psi(zz') = \Psi(z)\Psi(z').$$

- (d) Soit M un élément de \mathcal{E} , non nul. On note a et b les réels tels que $M = aI + bJ$. Justifier que $(a, b) \neq (0, 0)$. On note $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ et θ un argument du complexe $a + ib$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = \rho^n \cos(n\theta)I + \rho^n \sin(n\theta)J.$$

3. Soit α et β deux réels non nuls. On note f_1 et f_2 les fonctions numériques réelles définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \cos(\beta x)e^{\alpha x}, \quad f_2(x) = \sin(\beta x)e^{\alpha x}.$$

On désigne par \mathcal{F} l'ensemble des fonctions de la forme $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$, avec (λ_1, λ_2) couple de réels.

- (a) Montrer que $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
 - (b) Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2)$ est une base de \mathcal{F} .
4. On considère φ l'application définie sur \mathcal{F} qui à f associe f' .
 - (a) Montrer que φ est un endomorphisme de \mathcal{F} .
 - (b) Donner la matrice représentative, notée M , de φ dans \mathcal{B} .

- (c) Donner un triplet (r, s, t) de réels tel que $rM^2 + sM + tI = 0$. (On pourra remarquer que $M - \alpha I$ s'exprime à l'aide de $J...$)
- (d) M est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.
- (e) Donner une autre démonstration de la question précédente en utilisant Ψ (défini en 2.).
- (f) Montrer que φ est un automorphisme de \mathcal{F} .

5. Application.

- (a) Montrer que tout élément de \mathcal{F} possède une unique primitive dans \mathcal{F} .
- (b) Calculer, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$I(\lambda, \mu) = \int_0^{\pi/2} (\lambda \cos(3x)e^{4x} + \mu \sin(3x)e^{4x}) dx.$$

Exercice 2

1. (a) Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Montrer que la fonction

$$f_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^a \end{array}$$

se prolonge en une fonction continue sur \mathbb{R}^+ (notée encore f_a), qui est de classe \mathcal{C}^1 pour $a \geq 1$.

Pour a et b dans \mathbb{R}^+ , on pose $I(a, b) = \int_0^1 f_a(t)f_b(1-t) dt$.

- (b) Trouver une relation entre $I(a+1, b)$ et $I(a, b+1)$.
- (c) Calculer $I(a, 0)$. En déduire pour $n \in \mathbb{N}$:

$$I(a, n) = \frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n+1)}.$$

2. Soit $a \in \mathbb{R}^+$. On pose pour $x > a$, $g_a(x) = x \ln \left(1 - \frac{a}{x}\right)$.

- (a) Quelle est la limite l_a de g_a en $+\infty$? Montrer : $\forall x > a$, $g_a(x) \leq l_a$.
- (b) Montrer : $\forall x > a$, $\ln x - \ln(x-a) \leq \frac{a}{x-a}$.
- (c) Etudier les variations de g_a sur $]a, +\infty[$.

- (d) Pour $n \in \mathbb{N}, n > a$, on pose $x_n = \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n$. Que dire la monotonie de $(x_n)_{n>a}$? Quelle est sa limite ?

3. Soit $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$F_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n u^x du.$$

- (a) Montrer que pour $x \in \mathbb{R}^+$ fixé, la suite $(F_n(x))$ est croissante.

- (b) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $u \geq A \Rightarrow e^{-u} \leq \frac{1}{u^{x+2}}$ et qu'on a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^* F_n(x) \leq \int_0^A e^{-u} u^x du + \frac{1}{A}.$$

En déduire que $(F_n(x))$ converge dans \mathbb{R} vers une limite notée $F(x)$.

- (c) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}^* F_n(x) = n^{x+1} I(x, n)$.

- (d) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}^+ F(x+1) = (x+1)F(x)$. En déduire la valeur de $F(k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Problème

Dans le problème, on note I le nombre complexe habituellement noté i , N un entier naturel non nul et on pose $n = 2^N$, $\omega_n = e^{\frac{2I\pi}{n}}$.

On appellera :

- polynôme associé à un n -uplet $a = (a_0, \dots, a_{n-1})$ de \mathbb{C}^n le polynôme $A \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ défini par

$$A = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1}.$$

- transformation de Fourier discrète l'application linéaire F_n associant à tout n -uplet a de \mathbb{C}^n le n -uplet de \mathbb{C}^n défini à l'aide du polynôme A associé à a par

$$F_n(a) = (A(1), A(\omega_n), A(\omega_n^2), \dots, A(\omega_n^{n-1})).$$

Pour $a = (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, on note $\bar{a} = (\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n-1})$ le conjugué de a . Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\bar{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de M .

Partie 1

1. Montrer que F_n est bijective de \mathbb{C}^n dans \mathbb{C}^n .
2. Expliciter la matrice M_n de l'endomorphisme F_n dans la base canonique de \mathbb{C}^n .
3. On désigne par i et j deux entiers vérifiant $-(n-1) \leq i-j \leq n-1$.

En distinguant les cas $i-j \neq 0$ et $i-j = 0$, calculer la somme $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{(i-j)k}$.

4. Calculer le produit matriciel $M_n \bar{M}_n$. (On pourra numéroter les lignes et les colonnes par les entiers de 0 à $n-1$.)
5. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}^n$, $F_n^{-1}(\alpha) = k_n \overline{F_n(\bar{\alpha})}$ où k_n est une constante à préciser.

Partie 2

A tout élément $a = (a_0, \dots, a_{n-1})$ de \mathbb{C}^n , on associe les éléments $b = (a_0, a_2, \dots, a_{n-2})$ et $c = (a_1, a_3, \dots, a_{n-1})$ de $\mathbb{C}^{\frac{n}{2}}$. On considère alors les images par la transformée de Fourier discrète de ces trois éléments que l'on note :

$$F_n(a) = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}), F_{\frac{n}{2}}(b) = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{\frac{n}{2}-1}) \text{ et } F_{\frac{n}{2}}(c) = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{\frac{n}{2}-1}).$$

1. Montrer que pour tout entier p entre 0 et $\frac{n}{2} - 1$,

$$\alpha_p = \beta_p + \gamma_p \omega_n^p \text{ et } \alpha_{p+\frac{n}{2}} = \beta_p - \gamma_p \omega_n^p.$$

2. On suppose connus les nombres complexes ω_n^p . On appelle "opération élémentaire" l'une des quatre opérations dans \mathbb{C} : $+$, \times , $-$ et \div . Les relations démontrées dans la question précédente permettent de calculer $F_n(a)$ à partir de $F_{\frac{n}{2}}(b)$ et $F_{\frac{n}{2}}(c)$.

On désigne par u_N le nombre des opérations élémentaires nécessaires au calcul de $F_n(a)$ par l'algorithme suivant (on rappelle que $n = 2^N$) :

- Si $N = 0$, $F_1(a) = (a)$ et $u_0 = 0$.
- Si $N \geq 1$, on calcule $F_{\frac{n}{2}}(b)$ et $F_{\frac{n}{2}}(c)$ ce qui nécessite $2u_{N-1}$ opérations, et on obtient $F_n(a)$ par les relations précédentes.

Exprimer u_N en fonction de u_{N-1} et N , et en déduire u_N en fonction de N puis de n . Pour p donné, on ne calculera qu'une seule fois le produit $\gamma_p \omega_n^p$.

Partie 3

On considère deux polynômes P et Q à coefficients réels ou complexes dont la somme des degrés respectifs est strictement inférieure à n , et le polynôme $R = PQ$. On pose :

$$P = \sum_{i=0}^{n-1} p_i X^i, Q = \sum_{j=0}^{n-1} q_j X^j, R = \sum_{k=0}^{n-1} r_k X^k$$

(les coefficients des polynômes P, Q, R d'indices strictement supérieur à leurs degrés respectifs sont nuls) et $p = (p_0, \dots, p_{n-1}), q = (q_0, \dots, q_{n-1})$ et $p^*q = (r_0, \dots, r_{n-1})$ les trois éléments de \mathbb{C}^n associés aux polynômes P, Q et $R = PQ$.

Enfin, on pose $pq = (p_0q_0, p_1q_1, \dots, p_{n-1}q_{n-1})$ le "produit" de deux éléments de \mathbb{C}^n .

1. Montrer que $F_n(p^*q) = F_n(p)F_n(q)$.
2. On calcule p^*q en calculant successivement :
 - les transformées de Fourier discrètes $F_n(p)$ et $F_n(q)$ (avec l'algorithme précédent).
 - le produit $F_n(p)F_n(q)$ et donc $F_n(p * q)$.
 - la transformée de Fourier discrète inverse $F_n^{-1}(F_n(p * q)) = p^*q$.Déterminer le nombre d'opérations élémentaires nécessaires à chaque étape.
3. Donner un équivalent en fonction de n du nombre d'opérations nécessaires au calcul du produit $R = PQ$ par cette méthode.
4. Comparer avec le nombre d'opérations élémentaires effectuées pour le calcul du produit PQ à l'aide d'une méthode plus "naturelle".