

# DS 5 - MPSI 1

## Avertissement

- La qualité du raisonnement tiendra une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera donc à répondre aux questions en faisant un raisonnement structuré et précis.
- Dans un même exercice, on pourra répondre à une question en admettant les résultats des questions précédentes.
- Si un élève repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie et poursuit l'exercice en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre.
- Vous pourrez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix.
- L'utilisation de documents et de la calculatrice est interdite.

## Exercice 1

### Partie A

L'objectif de cette partie est de montrer qu'un sous-groupe additif de  $\mathbb{R}$  est soit dense dans  $\mathbb{R}$  soit de la forme  $a\mathbb{Z}$  avec  $a \geq 0$ . Soit  $G$  un sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$  non réduit à  $\{0\}$ .

1. Montrer que  $G \cap ]0, +\infty[$  est non vide et admet une borne inférieure. On notera  $\delta = \inf G \cap ]0, +\infty[$ .
2. On suppose que  $\delta > 0$ .
  - (a) Montrer que  $\delta \in G$ . On pourra raisonner par l'absurde en considérant deux éléments de  $G$  suffisamment proches de  $\delta$ .
  - (b) On note  $\delta\mathbb{Z}$  l'ensemble  $\{\delta p, p \in \mathbb{Z}\}$ . Montrer que  $\delta\mathbb{Z} \subset G$ .
  - (c) Montrer que  $G = \delta\mathbb{Z}$ .
3. On suppose que  $\delta = 0$ .
  - (a) Montrer que  $\forall \varepsilon > 0, ]0, \varepsilon[ \cap G \neq \emptyset$ .
  - (b) Montrer que  $\forall a \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, ]a, a + \varepsilon[ \cap G \neq \emptyset$ .
  - (c) Montrer que  $G$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

### Partie B

1. Vérifier que  $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z} = \{p + \sqrt{2}q, (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$ .
2. En se servant du fait que  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ , montrer que  $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x + \sqrt{2}) = f(x + 1)$ .

3. Montrer que  $f$  est une application constante.

### Partie C : une fonction presque périodique

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x) = \cos(2\pi x) + \cos(2\pi\sqrt{2}x)$ .

Soit  $\varepsilon > 0$  fixé dans la suite de la partie.

On dit qu'un réel  $T$  est une  $\varepsilon$ -presque période de  $f$  si  $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x + T) - f(x)| \leq \varepsilon$ .

Dans cette partie on pourra utiliser la densité de l'ensemble  $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$  démontrée en partie B.

1. Montrer que la fonction  $\cos$  est 1-lipschitzienne ( $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |\cos(x) - \cos(y)| \leq |x - y|$ ).
2. Montrer qu'il existe deux entiers naturels  $p$  et  $q$  non nuls tels que  $|p - \sqrt{2}q| \leq \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2\pi}, \frac{1}{2} \right\}$ .

3. Montrer que  $q$  est une  $\varepsilon$ -presque période de  $f$ .
  4. On pose  $d = |p - \sqrt{2}q|$  et pour  $m \in \mathbb{N}^*$ , on définit  $k_m$  comme le plus petit entier naturel supérieur ou égal à  $\frac{m}{d}$ .  
Montrer que  $k_m q$  est une  $\varepsilon$ -presque période de  $f$ . On distinguera les cas  $p > \sqrt{2}q$  et  $p < \sqrt{2}q$ .
  5. Montrer que  $\forall m \in \mathbb{N}^*$ ,  $|k_{m+1} - 1 - k_m| \leq \frac{1}{d}$  puis majorer  $|k_{m+1}q - k_m q|$  indépendamment de  $m$ .
  6. Montrer qu'il existe un réel  $l_\varepsilon > 0$  tel que dans tout intervalle de  $\mathbb{R}$  de longueur  $l_\varepsilon$  se trouve une  $\varepsilon$ -presque période de  $f$ .
- On dit alors que  $f$  est presque périodique. La théorie de la presque périodicité a été développée par Bohr et Besicovitch.

### Exercice 2

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie et continue sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

On suppose que  $f(0) = f(1) = 0$  et que pour tout  $x$  réel de l'intervalle  $\left[0, \frac{7}{10}\right]$ ,  $f\left(x + \frac{3}{10}\right) \neq f(x)$ .

1. Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  a au moins sept solutions sur  $[0, 1]$ .
2. Donner un exemple de fonction  $f$  vérifiant les hypothèses ; on pourra se contenter d'une représentation graphique claire.

### Exercice 3

On considère la suite de nombres réels  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + u_n^2 \\ u_0 &= a, a \in \mathbb{R}_+^* \end{aligned}$$

**Partie A :** Convergence de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1. Montrer que cette suite est strictement positive et monotone.
2. Montrer que cette suite diverge vers l'infini.

**Partie B :** Comportement asymptotique de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

On définit la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :  $v_n = \frac{1}{2^n} \ln u_n$

1. Prouver que pour tout entier  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$ .  
En déduire que quels que soient les entiers naturels  $p$  et  $n$  :

$$0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leq \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$$

2. En déduire que quels que soient les entiers naturels  $k$  et  $n$

$$0 < v_{n+k+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$$

3. Démontrer que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée, puis qu'elle converge vers une limite notée  $\alpha$ .
4. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq \exp(\alpha 2^n)$   
En passant à la limite pour  $n$  fixé dans l'encadrement B.2, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exp(\alpha 2^n) \leq u_n + 1$$

En déduire, lorsque  $n$  tend vers l'infini, l'équivalent suivant :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \exp(\alpha 2^n)$$

5. On pose  $\beta_n = \exp(\alpha 2^n) - u_n$ .  
Montrer que la suite  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée et qu'elle vérifie la relation suivante :

$$2\beta_n - 1 = (\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n) \exp(-\alpha 2^n)$$

6. Prouver enfin que lorsque  $n$  tend vers l'infini :  $u_n = -\frac{1}{2} + \exp(\alpha 2^n) + o(1)$