

## DM 9 - MPSI 1

### Partie I

Soit  $a \neq 1$  un réel fixé, on considère l'ensemble  $\mathcal{S}$  des suites réelles  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant pour tout entier  $n$

$$w_{n+2} = (2 - a)w_{n+1} + (a - 1)w_n$$

On rappelle que  $\mathcal{S}$  est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de l'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  des suites réelles.

1. Déterminer, suivant les valeurs de  $a$  une base de  $\mathcal{S}$ .
2. Soit  $w$  un élément de  $\mathcal{S}$ . Suivant les valeurs de  $a$ , exprimer  $w_n$  pour  $n \in \mathbb{N}$  en fonction de  $w_0$  et  $w_1$ .

### Partie II

Soit  $V$  un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel de dimension 3 et  $\mathcal{B} = (u, v, w)$  une base de  $V$ . Les endomorphismes  $f$  et  $g$  de  $V$  sont définis par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} f(u) &= 0_V, & f(v) &= u - v, & f(w) &= 0_V \\ g(u) &= 0_V, & g(v) &= 0_V, & g(w) &= u - w \end{aligned}$$

On pose aussi  $E = \{h_{a,b}, (a, b) \in (\mathbb{R} - \{1\})^2\}$  avec, pour  $a$  et  $b$  réels différents de 1,  $h_{a,b}$  défini par

$$h_{a,b} = \text{Id}_V + af + bg$$

1. Montrer que  $(E, \circ)$  est un sous-groupe commutatif du groupe  $(\text{GL}(V), \circ)$  des automorphismes de  $V$ .

2. Résoudre dans  $E$  les équations suivantes

$$\begin{aligned} h_{a,b} \circ h_{c,d} &= h_{a,b} \\ h_{a,b} \circ h_{c,d} &= h_{c,d} \end{aligned}$$

### Partie III

On utilise dans cette partie les notations  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Soit  $a$  un réel différent de 0 et de 1 et

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

1. Montrer que  $M^2$  est combinaison linéaire de  $M$  et  $\text{Id}_2$ .
2. Établir l'existence de deux suites  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  pour tout entier  $n$  :

$$M^n = \alpha_n M + \beta_n \text{Id}_2$$

et

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = \alpha_n + \beta_n \\ \beta_{n+1} = \alpha_n \end{cases}$$

$x, y, x', y'$  étant des réels à déterminer.

3. Vérifier que  $\alpha \in \mathcal{S}$ . En déduire l'expression de  $\alpha_n$  en fonction de  $n$ .