

DM 5 - MPSI 1

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = a$ avec $a \in \mathbb{R}$.

On notera $E(x)$ la partie entière d'un réel x .

1. On suppose $a = 0$ dans les trois premières questions.
Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que

$$\exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \in]A+1, +\infty[\Rightarrow |f(x) - f(x - E(x - A))| \leq (x - A)\varepsilon.$$

On fixe ce réel A dans la suite.

2. Montrer que

$$\forall x \in]0, +\infty[, x \in]A+1, +\infty[\Rightarrow \frac{|f(x)|}{x} \leq \varepsilon + \frac{M}{x}$$

où $M = \sup_{t \in [A, A+1]} |f(t)|$. On justifiera l'existence de M .

3. Montrer que

$$\exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x > B \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq 2\varepsilon$$

et conclure dans le cas $a = 0$.

4. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$. Se servir du résultat pour $a = 0$ en introduisant une fonction auxiliaire adaptée.

Exercice 2

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = f(1)\}$. Si $f \in E$, on dira que $c \in]0, 1]$ est une corde de f ssi il existe $x \in [0, 1 - c]$ tel que $f(x+c) = f(x)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in E$. On pose $g : x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] \mapsto f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$.

Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} (g(k/n))$ et en déduire que $1/n$ est une corde de f .

2. Soit $c \in]0, 1] \setminus \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. On pose $f : x \in [0, 1] \mapsto x - \frac{\sin^2(\pi x/c)}{\sin^2(\pi/c)}$. Justifier que f est bien définie et dans E et que c n'est pas une corde de f .

3. On se donne $c \in]0, 1[$ et $f \in E$. On veut montrer que c ou $1 - c$ est une corde de f .

- (a) On définit le prolongement de f 1-périodique $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $\forall x \in [0, 1], \forall k \in \mathbb{Z}, g(x+k) = f(x)$. Pourquoi g est-elle bien définie et continue ?

On pose $h : x \in \mathbb{R} \mapsto g(x+c)$.

- (b) Justifier que $g - h$ est bornée et atteint ses bornes.

Supposons que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \neq h(x)$.

- (c) Justifier qu'alors $\min_{x \in \mathbb{R}} (g(x) - h(x)) > 0$ ou $\max_{x \in \mathbb{R}} (g(x) - h(x)) < 0$.

- (d) Les deux cas sont symétriques. Disons que $e = \min_{x \in \mathbb{R}} (g(x) - h(x)) > 0$.

Montrer qu'alors $\max_{x \in \mathbb{R}} g(x) \geq e + \max_{x \in \mathbb{R}} h(x)$ (on justifiera d'abord l'existence des maxima) et trouver une contradiction.

- (e) Ainsi, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = h(x)$ i.e. $g(x) = g(x+c)$.