DM 15 - Déterminant de Cauchy - Théorème de Müntz

I. Déterminant de Cauchy

Dans cette partie, $\mathbb{K}$ est un corps ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Soient $a_1, .., a_n, b_1, ..., b_n \in \mathbb{K}$ tels que pour tout $1 \leq i, j \leq n, a_i + b_j \neq 0$.
On note pour $1 \leq k \leq n, D_k = \det\left(\left(\dfrac{1}{a_i + b_j}\right)_{1 \leq i,j \leq k}\right)$.

1. On suppose que les scalaires a_i (ou b_j) ne sont pas distincts deux à deux. Déterminer D_n.

2. On suppose les a_i distincts deux à deux (ainsi que les scalaires b_j). On définit la fraction rationnelle

$$F(X) = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1 + b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_1 + b_{n-1}} & \dfrac{1}{a_1 + X} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dfrac{1}{a_n + b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_n + b_{n-1}} & \dfrac{1}{a_n + X} \end{vmatrix}$$

   (a) Déterminer les pôles de F et la partie polaire de F relative au pôle $-a_n$ en fonction de D_{n-1}.
   (b) On écrit $F(X) = \dfrac{N(X)}{D(X)}$ où D est un polynôme unitaire de degré n à déterminer. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $N(X) = \lambda \displaystyle\prod_{i=1}^{n-1} (X - b_i)$.
   (c) Déterminer λ en fonction de $D_{n-1}, a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_{n-1}$.
   (d) En remarquant que $D_n = F(b_n)$, déterminer D_n en fonction de D_{n-1}.

3. Montrer par récurrence que $D_n = \displaystyle\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(a_j - a_i)(b_j - b_i)}{(a_j + b_i)(b_j + a_i)} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(a_i + b_i)}$.

II. Déterminant de Gram

Soient $x_1, ..., x_p$ des vecteurs d'un espace euclidien E. On note $G(x_1, ..., x_p) = ((x_i|x_j))_{1 \leq i,j \leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ la matrice de terme général $(x_i|x_j)$.

1. Montrer que $(x_1, ..., x_p)$ est une famille libre si et seulement si $G(x_1, ..., x_p)$ est inversible.
2. On suppose dans la suite que $(x_1, ..., x_p)$ est une famille libre. Montrer qu'il existe $P \in GL_p(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure inversible telle que $G(x_1, ..., x_p) = {}^tPP$. En déduire que $\det(G(x_1, ..., x_p) > 0$.
   Soit $x \in E$ et $m_1, ..., m_{p+1}$ les cofacteurs de $G(x_1, ..., x_p, x)$ associés aux indices $(p+1, 1), (p+1, 2), ..., (p+1, p+1)$. On pose $y = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} (-1)^{p+1+j} m_j x_j + m_{2p+1} x$.
3. Montrer que $y \in$ Vect $(x_1, ..., x_p)^\perp$.
4. Montrer que $\dfrac{1}{m_{2p+1}} y$ est la projection orthogonale de x sur Vect $(x_1, ..., x_p)^\perp$.
5. Montrer que $d(x, \text{Vect } (x_1, ..., x_p)) = \sqrt{\dfrac{\det(G(x_1, ..., x_p, x)}{\det G(x_1, .., x_p)}}$.

III. Théorème de Müntz

On note $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et on munit E du produit scalaire $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\ \mathrm{dt} = (f|g)$. On considère une suite strictement croissante $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de réels strictement positifs.
Pour $r \geq 0$, on note $h_r : t \mapsto t^r \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \text{Vect}\,(h_{\lambda_1},...,h_{\lambda_n})$. Dans la suite de la partie, on fixe un réel strictement positif r distinct des réels λ_i.

1. Montrer que $d(h_r,H_n)^2 = \dfrac{1}{2r+1}\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{r-\lambda_i}{r+\lambda_i+1}\right)^2$.
2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (d(h_r,H_n)^2)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   Montrer que (u_n) tends vers 0 si et seulement si la suite $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\ln\left|\frac{\lambda_i-r}{\lambda_i+r+1}\right|\right)$ diverge vers $-\infty$.
3. On suppose que (λ_i) converge vers un réel λ. Montrer que (u_n) tend vers 0.
4. On suppose que (λ_i) diverge vers $+\infty$. Montrer que $\ln\left|\dfrac{\lambda_i-r}{\lambda_i+r+1}\right| \sim \mu\dfrac{1}{\lambda_i}$ où μ est une constante à déterminer. On admet qu'alors $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\ln\left|\frac{\lambda_i-r}{\lambda_i+r+1}\right|\right)$ diverge vers $-\infty$ si et seulement si $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\right)$ diverge vers $+\infty$.
5. **Synthèse** : conclure en montrant que $(d(h_r,H_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers zéro si et seulement si $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\right)$ diverge vers $+\infty$.

L'an prochain, vous pourrez à partir de ce résultat que Vect $(h_{\lambda_1},...,h_{\lambda_n},...)$ est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ (muni de la norme euclidienne) si et seulement si $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\right)$ diverge vers $+\infty$.