DM 1 de mathématiques - MPSI 1 - 2 octobre 2006

Exercice 1

Dans l'exercice, α est un réel non nul et $I =]0, +\infty[$

1. Résoudre sur I l'équation différentielle $xy' - \alpha y = 0$ et expliciter la solution u_0 qui vérifie $u_0(1) = 1$.
2. Résoudre sur I l'équation différentielle $xy' - \alpha y = u_0(x)$ et expliciter la solution u_1 qui vérifie $u_1(1) = 0$.
3. Expliciter la primitive de $x \mapsto \dfrac{((\ln(x))^n}{n!x}$ définie sur I et valant 0 en 1.
4. On définit par récurrence une suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par u_0 défini plus haut et u_{n+1} l'unique solution de $xy' - \alpha y = u_n(x)$ définie sur I et qui vaut zéro en $x = 1$. Expliciter u_n à l'aide des fonctions usuelles. On pourra “deviner" le résultat et le démontrer par récurrence.

Exercice 2

Dans l'exercice, a et b sont des réels et d est une fonction continue définie sur $\mathbb{R}$.
On s'intéresse à (E) l'équation différentielle $x^2y'' + axy' + by = d(x)$

1. On va résoudre cette équation successivement sur $]-\infty, 0[$ puis sur $]0, +\infty[$ en faisant le changement de variable $x = -e^t$ dans un cas, $x = e^t$ dans l'autre. Soit f une solution de (E) sur $]0, +\infty[$. Montrer que $g : t \mapsto f(e^t)$ vérifie une équation différentielle du second ordre à coefficients constants.
2. Si f est une solution sur $]-\infty, 0[$, montrer que $g : t \mapsto f(-e^t)$ vérifie une équation du second ordre à coefficients constants.
3. Résoudre avec ces changements de variables l'équation $x^2y'' - xy' - 3y = x^4$. On donnera l'ensemble des solutions sur $]-\infty, 0[$, $]0, +\infty[$ et $\mathbb{R}$ en raccordant les solutions.

Consignes : Devoir à faire en binôme (une copie rendue par binôme avec un exercice rédigé par élève).