

Sujets de colles - Matrices

MPSI 1 - Lycée Descartes

Exercice 1

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$ ($n = \dim E$). Montrer que $\exists x \in E, (x, f(x), \dots, f^{(n-1)}(x))$ base de E . Donner la matrice de f, f^2, \dots, f^{n-1} dans cette base.

Exercice 2

Soit $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), C \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. Trouver x tel que $ABC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & x & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. On pourra s'intéresser au rang de ABC .

Exercice 3

Calculer $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 2 & 1 & \frac{1}{3} \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}^n$.

Exercice 4

Soit E un \mathbb{R} -ev de dimension 3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = f^3$ et $\dim \text{Ker}(f - Id) = 1$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \{0, 1\}$.

Exercice 5

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_2[X], \mathbb{C}_3[X])$ définie par $\varphi(P) = XP - X^2P'(0) + P''$. Donner la matrice de φ relativement aux bases canoniques. Déterminer le rang de φ .

Exercice 6

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $A^3 + aA^2 + bA + cI_3 = 0$. En déduire que l'ensemble des matrices

$$\{M(p, q, r) = \begin{pmatrix} p & r & q \\ q & p+3r & 3q+r \\ r & q & p+3r \end{pmatrix}, (p, q, r) \in \mathbb{R}^3\}$$

est un espace vectoriel dont on donnera une base, et un anneau.

Exercice 7

Soit $a \in \mathbb{R}, A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par $a_{i,j} = 1$ si $i \neq j$ et $a_{i,i} = 1 + a$. Calculer le rang de A_3 . En distinguant les cas $a \notin \{0, -n\}, a = 0$ et $a = -n$, déterminer le rang de A_n .

Exercice 8

Résoudre le système
$$\begin{cases} x + 3y + 2z + t = 2 \\ 2x + 7y + 3z = -5 \\ 3x + 8y + 7z + 11t = 13 \\ -2x - 8y - 2z + 6t = 0 \end{cases}$$

Exercice 9

Déterminer le rang de $A = (i + j - 1)_{1 \leq i, j \leq n}$

Exercice 10

Déterminer le rang de $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$.

Exercice 10

Déterminer le rang de $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ -4 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 11

Soit $E = \{f_{a,b} : x \mapsto (ax + b)e^{2x}, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ et $\psi : f \mapsto f'$. Montrer que $\psi \in \mathcal{L}(E)$. Déterminer la matrice de ψ dans la base $(f_{1,0}, f_{0,1})$.

Exercice 12

Soit E un \mathbb{R} -ev de dimension $2n + 1$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{2n+1})$ une base de E et $T \in \mathcal{L}(E)$ tel que $T(e_1) = e_2, T(e_i) = e_{i-1} + e_{i+1}$ pour $2 \leq i \leq 2n$ et $T(e_{2n+1}) = e_{2n}$. Déterminer la matrice de T dans \mathcal{B} , $\text{Im } T$, $\text{Ker } T$ et le rang de T .

Exercice 13

Soit $a \in \mathbb{R}$. Inverser la matrice triangulaire supérieure d'ordre n définie par $a_{i,j} = a^{j-i}$ pour $j \geq i$.

Exercice 14

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Montrer que A est inversible.

Exercice 15

Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Déterminer le rang de $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$.

Exercice 16

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ ($\dim E = 3$) tel que $f^2 = 2f - Id, f \neq 2Id$. Montrer que f est inversible et calculer f^{-1} . Montrer que $\text{Im}(f - Id) \subset \text{Ker}(f - id)$. Montrer qu'il existe une base dans laquelle f a pour matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n .