

# Sujets de colles - Espaces vectoriels

## MPSI 1 - Lycée Descartes

Sauf précision contraire,  $E$  désignera un  $\mathbb{K}$  espace vectoriel.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $p$  un projecteur de  $E$ . Montrer que  $u$  et  $p$  commutent ssi  $\text{Ker } p$  et  $\text{Im } p$  sont stables par  $u$ .

### Exercice 1 (Jean-Baptiste)

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^3 - 3f^2 + 2f = 0$ . On pose  $F = \text{Ker } f$ ,  $G = \text{Ker } (f - \text{Id})$  et  $H = \text{Ker } (f - 2\text{Id})$ . Montrer que  $E = F \oplus G \oplus H$ .

### Exercice 9 (Benjamin H)

Soit  $a \in \mathbb{K}^*$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$  non inversible tel que  $f^3 - 2af^2 + a^2f = 0$ . Montrer que  $\text{Im } f$  et  $\text{Ker } f$  sont supplémentaires dans  $E$ .

### Exercice 2 (Mathieu V)

Soit  $p$  un projecteur de  $E$ .

1. Montrer que  $p$  est un projecteur de  $E \Leftrightarrow \text{Id} - p$  projecteur de  $E$ .
2. Soient  $p_1$  et  $p_2$  des projecteurs de  $E$  tels que  $p_1 \circ p_2 = 0$ . On pose  $q = p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1$ . Montrer que  $q$  est un projecteur de  $E$ ,  $\text{Ker } q = \text{Ker } p_1 \cap \text{Ker } p_2$ ,  $\text{Im } q = \text{Im } p_1 + \text{Im } p_2$ .

### Exercice 10 (Younes)

Soit  $E = \mathbb{R}^n$ ,  $F = \{(x_1, \dots, x_n), \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$  et  $G = \text{Vect}\{(1, 1, \dots, 1)\}$ . Montrer que  $E = F \oplus G$ .

### Exercice 3 (Aurélien)

Montrer que  $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Ker } f \circ f = \text{Ker } f \\ \text{Im } f \circ f = \text{Im } f \end{cases}$

### Exercice 11 (Elodie)

Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $f(x, y, z) = (3x - 4y - 2z, 4x - 7y - 4z, -5x + 10y + 6z)$ . Calculer  $f \circ f$ , donner la nature de  $f$  et ses éléments caractéristiques.

### Exercice 4 (Nazim)

Soit  $f$  un projecteur. Montrer que  $\text{Im } f = \text{Ker } (f - \text{Id})$  et  $E = \text{Ker } f \oplus \text{Ker } (f - \text{Id})$ .

Soient  $p$  et  $q$  deux projecteurs qui commutent. Montrer que  $p \circ q$  est un projecteur, que  $\text{Im } (p \circ q) = \text{Im } p \cap \text{Im } q$  et  $\text{Ker } (p \circ q) = \text{Ker } p + \text{Ker } q$ .

### Exercice 12 (Georges)

Soit  $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ ,  $K = \{f \in E, f \text{ constante}\}$ ,  $I_0 = \{f \in E, \int_{-1}^1 f(x)dx = 0\}$  et  $\Phi_0 = \{f \in E, f(0) = 0\}$ . Montrer que  $E = K \oplus I_0$  et  $E = K \oplus \Phi_0$ .

### Exercice 5 (Florian)

Soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes de  $E$  qui commutent :  $u \circ v = v \circ u$ . Montrer que  $\text{Ker } u$  et  $\text{Im } u$  sont deux sev de  $E$  stables par  $v$ .

### Exercice 13 (Julien B)

Soit  $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . On considère  $F$  l'ensemble des fonctions affines et  $G = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\}$ . Montrer que  $E = F \oplus G$ .

### Exercice 6 (Kévin)

Les questions sont indépendantes.

1. Soient  $E, F$  et  $G$  trois  $K$ -ev,  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ . Montrer que  $\text{Ker } g \circ f = f^{-1}(\text{Ker } g)$ ,  $\text{Ker } f \subset \text{Ker } (g \circ f)$ ,  $\text{Im } (g \circ f) = g(\text{Im } f)$  et  $\text{Im } (g \circ f) \subset \text{Im } g$ .
2. Soient  $p$  et  $q$  deux projecteurs. Montrer que  $p + q$  est un projecteur ssi  $p \circ q = q \circ p$  et qu'alors  $\text{Ker } (p + q) = \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$  et  $\text{Im } (p + q) = \text{Im } p + \text{Im } q$ .

### Exercice 14 (Xavier)

Soit  $E = \mathbb{R}[X]$  l'ensemble des polynômes à coefficients réels. On considère l'application  $f_a : E \rightarrow E$  définie par  $f_a(P) = (X^2 - 1)P' - aXP$  où  $a \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $f_a$  est un endomorphisme de  $E$ . On prend  $a = 1$ . Déterminer  $\text{Ker } f_1$ .  $f_1$  est-elle injective ?  $f_1$  est-elle un automorphisme ? (On pourra rechercher le degré de  $f_a(P)$  en fonction du degré de  $P$ ). On prend  $a = 2$ . Déterminer  $\text{Ker } f_2$ .  $f_2$  est-elle injective ?

### Exercice 7 (Mathieu L)

Soient  $E, F$  et  $G$  trois  $K$ -ev,  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ . Montrer que  $\text{Ker } (f \circ g) = \text{Ker } f \Leftrightarrow \text{Ker } g \cap \text{Im } f = \{0\}$  et  $\text{Im } (g \circ f) = \text{Im } g \Leftrightarrow \text{Ker } g + \text{Im } f = F$ .

### Exercice 15 (Sébastien)

Soit  $F = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5, x + y + z = 0 \text{ et } x + u - t = 0\}$  et  $G = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5, x + y - z + t = 0\}$ . Déterminer des bases de  $F, G$  et  $F \cap G$ .

### Exercice 8 (Laura)

**Exercice 16** (Charles)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $E = \mathbb{R}_n[X]$  l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$  et  $f : E \rightarrow E$  définie par  $f(P) = P - P'$ . Montrer que  $f$  est un endomorphisme injectif de  $E$  puis que c'est un automorphisme de  $E$ . (On pourra s'aider de  $g : P \mapsto \sum_{k=0}^{n+1} P^{(k)}$ ).

**Exercice 17** (Aude)

Soit  $g$  et  $f$  deux endomorphismes de  $E$  tels que  $g \circ f \circ g = g$  et  $f \circ g \circ f = f$ . Montrer que  $\text{Ker } f \oplus \text{Im } g = E$ .

**Exercice 18** (Thomas F)

Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$ . Montrer que  $f(\text{Ker}(g \circ f)) = \text{Ker } g \cap \text{Im } f$ .

**Exercice 19** (Kévin)

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^3 = \text{Id}$ . Montrer que  $\text{Ker}(f - \text{Id}) \oplus \text{Im}(f - \text{Id}) = E$ .

**Exercice 20** (Pierre)

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $(f - \text{Id}) \circ (f - \text{Id}) = 0$ . Montrer que  $f$  est inversible. Déterminer  $f^{-1}$  en fonction de  $f$ . Déterminer  $f^n$  en fonction de  $f$  pour  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Exercice 21** (Pierre-Olivier)

Soit  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z = 0\}$  et  $F = \text{Vect}\{(1, 1, 1)\}$ . Montrer que  $E$  est un sev de  $\mathbb{R}^3$ . Montrer que  $E$  et  $F$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $f$  la symétrie par rapport à  $E$  parallèlement à  $F$ . Calculer  $f((x, y, z))$  en fonction de  $x, y, z$  pour  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

**Exercice 22** (Jean-Baptiste)

Soit  $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - 3y + 2z + t = 0 \text{ et } y + z - 4t = 0\}$ . Montrer que  $F$  est un sev de  $\mathbb{R}^4$ . En déterminer une base et sa dimension.

**Exercice 23** (Jean-Baptiste)

Soit  $f : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K} \times \mathbb{K}[X]$  définie par  $f(P) = (P(0), P'(0))$ . Montrer que  $f$  est un isomorphisme d'espace vectoriel. En déduire que  $\mathbb{K}[X]$  est de dimension infinie.

**Exercice 24** (Xavier)

Soit  $F = \text{Vect}\{(u, v, w, t)\}$  avec  $u = (1, 2, 1, 0)$ ,  $v = (4, -2, 1, 1)$ ,  $w = (7, 2, 4, 2)$  et  $t = (11, 4, 1, 3)$ . Montrer que  $F$  est un sev de  $\mathbb{R}^4$ , préciser une base de  $F$  et sa dimension.

**Exercice 25** (Sébastien)

Dans  $\mathbb{R}_3[X]$  on définit les polynômes  $U = X^2 + X + 1$ ,  $V = X^3 - 2X + 1$  et  $W = X^2 + 3X$ . La famille  $(U, V, W)$  est-elle libre ? Si oui, la compléter pour obtenir une base de  $\mathbb{R}_3[X]$ .

**Exercice 26** (Pierre-Olivier)

Dans  $\mathbb{R}^3$  on considère  $u = (1, 1, -1)$ ,  $v = (-1, 1, 1)$  et  $w =$

$(1, -1, 1)$ . Montrer que la famille  $\{u, v, w\}$  forme une base de  $\mathbb{R}^3$ . Donner les coordonnées du vecteur  $(2, 1, 3)$  dans cette base.

**Exercice 27** (Bastien)

Montrer que la famille  $\{1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n\}$  forme une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

**Exercice 28** (Bastien)

Soit  $f$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -ev  $E$  de dimension  $n$  tel que  $f^n = 0$  et  $f^{n-1} \neq 0$ . Montrer qu'il existe  $x_0 \in E$  tel que la famille  $\{x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\}$  forme une base de  $E$ .

**Exercice 29** (Thomas)

$F = \text{Vect}\{(1, 2, 3, -2), (0, -1, 1, -1)\}$  et  $G = \text{Vect}\{(2, 3, 1, -1), (2, 1, 0, -1)\}$ . Déterminer une famille génératrice de  $F + G$  puis une base de  $F + G$ .

**Exercice 30** (Anthony)

Soit  $E$  de dimension  $n$ ,  $f \in \mathcal{L}(E)$ ,  $(e_1, \dots, e_p)$  une base de  $\text{Ker } f$ ,  $(e_{p+1}, \dots, e_n)$  une base d'un supplémentaire de  $\text{Ker } f$  dans  $E$ . Montrer que  $(f(e_{p+1}), \dots, f(e_n))$  est une base de  $\text{Im } f$ .

**Exercice 31** (Martin)

Soient  $r_1, \dots, r_n$   $k$  réels distincts,  $f_k : x \mapsto e^{r_k x}$ . Montrer que la famille  $(f_1, \dots, f_n)$  est une famille libre.

**Exercice 32** (Youssef)

On pose  $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . On définit  $\Phi : E \rightarrow E$  par  $\Phi(f) = f'' - 3f' + 2f$ . Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme et préciser  $\text{Ker } \Phi$ .

**Exercice 32** (Ghali)

Soit  $E$  de dimension  $n$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme nilpotent ( $f^n = 0$ ). Montrer que  $\text{Id} - f$  est inversible et préciser son inverse.

**Exercice 33** (Erwan)

On pose  $E = \mathbb{R}^3$ ,  $v_1 = (1, 1, -1)$ ,  $v_2 = (1, 2, 4)$ ,  $v_3 = (3, -1, a)$  et  $v_4 = (2, 3, b)$  avec  $a$  et  $b$  des réels. Déterminer  $a$  et  $b$  pour que  $\text{Vect}\{v_1, v_2\} = \text{Vect}\{v_3, v_4\}$ .

**Exercice 34** (Charles)

Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $f((x, y, z)) = (x + 2y, z - x, x + 4y + z)$ . Montrer que  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ . Déterminer une base de  $\text{Ker } f$  et de  $\text{Im } f$ .

**Exercice 35** (Laurent)

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On pose  $E = \mathbb{R}^3$ ,  $x = (2 - \lambda, -3, 2)$ ,  $y = (-4, 1 - \lambda, 6)$  et  $z = (-2, -1, 6 - \lambda)$ . Déterminer en fonction de  $\lambda$  la dimension du sev engendré par  $\{x, y, z\}$ .

**Exercice 36** (Ghali)

Soient  $E_1, E_2, F$  trois sev de  $E$ . On suppose que  $E_1 \subset E_2$ .

Montrer que  $E_1 \cap F = E_2 \cap F$  et  $E_1 + F = E_2 + F \Rightarrow E_1 = E_2$ .

**Exercice 37** (Mathieu L)

Soit  $E$  de dimension  $n$ ,  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On dit que  $u$  est nilpotent s'il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $u^p = 0$ . Montrer que si  $u$  est nilpotent,  $u^n = 0$ .

**Exercice 38** (Kévin J)

Soient  $A, B, C$  trois sev de  $E$ . Montrer que  $A \subset B \Rightarrow A + (B \cap C) = (A + B) \cap (A + C)$ .

**Exercice 39** (Benjamin H)

Soient  $F$  et  $G$  deux sev de  $E$  tels que  $F + G = E$ . Soit  $F'$  sev de  $E$  tel que  $F' \oplus (F \cap G) = E$ . Montrer que  $F' \oplus G = E$ .

**Exercice 40** (Alexandre)

Pour  $k \in \mathbb{N}$ , on définit  $f_k : x \mapsto |x_k|$ . Montrer que toute sous-famille finie de  $\{f_k, k \in \mathbb{N}\}$  est une famille libre.

**Exercice 41** (Mathieu V)

Soient  $u, v \in \mathcal{L}(E)$  tels que  $u \circ v = 0$  et  $u + v \in GL(E)$ . Montrer que  $\text{Im } v = \text{Ker } u$ .

**Exercice 42** (Marius)

Soit  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z = 0\}$  et  $G = \text{Vect}\{(1, 1, 1)\}$ . Montrer que  $F \oplus G = \mathbb{R}^3$ . Exprimer en fonction de  $x, y, z$  l'image de  $(x, y, z)$  par la projection sur  $G$  parallèlement à  $F$ .

**Exercice 43** (Elodie)

On considère les fonctions  $f_1 : x \mapsto \sin x$ ,  $f_2 : x \mapsto \cos x$ ,  $f_3 : x \mapsto \sin(2x)$ ,  $f_4 : x \mapsto \cos(2x)$ . La famille  $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$  est-elle libre ?

**Exercice 44** (Thomas L)

Montrer que la famille  $\{(1, -1, 1), (2, 1, -1), (-1, 3, -1)\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . Donner les coordonnées de  $(x, y, z)$  dans cette base.

**Exercice 45** (Thomas L)

Montrer que  $(Id, \exp, \ln)$  forme une famille libre dans  $\mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{R})$ .

**Exercice 46** (Nathaniel)

Dans  $\mathbb{R}^4$  on pose  $u = (1, 0, 1, 0)$ ,  $v = (0, 1, -1, 0)$ ,  $w = (1, 1, 1, 1)$ ,  $x = (0, 0, 1, 0)$ ,  $y = (1, 1, 0, -1)$ . On pose  $F = \text{Vect}\{u, v, w\}$  et  $G = \text{Vect}\{x, y\}$ . Donner la dimension de  $F, G, F + G, F \cap G$ .

**Exercice 47** (Nathaniel)

Dans  $\mathbb{R}^3$  on pose  $x = (2, 3, -1)$ ,  $y = (1, -1, -2)$ ,  $u = (3, 7, 0)$ ,  $v = (5, 0, -7)$ . Déterminer les dimensions de  $\text{Vect}\{x, y\}$  et  $\text{Vect}\{u, v\}$ . Montrer que  $\text{Vect}\{x, y\} = \text{Vect}\{u, v\}$ .

**Exercice 48** (Aurélien)

On pose  $u = (1, 2, 3)$ ,  $v = (3, 2, 1)$ . Donner une condition sur  $x, y, z$  pour que  $(x, y, z) \in \text{Vect}\{u, v\}$ .

**Exercice 49** (Kévin A)

Soit  $E$  de dimension finie  $n$ ,  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que  $f^2 = 0$  et  $n = 2rg(f) \Leftrightarrow \text{Im } f = \text{Ker } f$ .

**Exercice 50** (Aude)

Soit  $E$  de dimension finie  $n$ ,  $u, v \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que  $rg(u + v) \leq rg(u) + rg(v)$ . Montrer que si  $u + v$  est inversible et  $u \circ v = 0$ , alors  $rg(u) + rg(v) = n$ .

**Exercice 51** (Victor)

Soit  $E$  de dimension finie. Montrer que  $\text{Ker } f^2 = \text{Ker } f \Leftrightarrow \text{Im } f^2 = \text{Im } f \Leftrightarrow E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$ .

**Exercice 52** (Julien B)

Soit  $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y - t = 0 \text{ et } y - z + t = 0\}$ . Montrer que  $E$  est un sev de  $\mathbb{R}^4$ , en donner une base puis déterminer un supplémentaire de  $E$  dans  $\mathbb{R}^4$ .

**Exercice 53** (Julien B)

On pose  $E = \text{Vect}\{(2, -1, -3), (-4, 1, 3), (-6, 3, 0), (7, 2, 1)\}$ . Déterminer une base de  $E$ .

**Exercice 54** (Elodie)

$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(0) = P'(1) = 0\}$ . Montrer que  $F$  est un sev de  $\mathbb{R}_3[X]$ , en donner une base et trouver un supplémentaire de  $F$  dans  $\mathbb{R}_3[X]$ .

**Exercice 55** (Georges)

Soit  $u = (8, 4, 1, -2)$ ,  $v = (1, 3, 0, 5)$ . Montrer que  $\{u, v\}$  est une famille libre, la compléter pour obtenir une base de  $\mathbb{R}^4$ .

**Exercice 56** (Pierre-Olivier)

Soit  $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  une base de  $\mathbb{R}^4$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f(e_1) = e_1 - e_3 + e_4$ ,  $f(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$ ,  $f(e_3) = -e_1 + 3e_2 + e_3 + 2e_4$ ,  $f(e_4) = -3e_1 + e_2 + 3e_3 - 2e_4$ . Déterminer le rang de  $f$ , une base de  $\text{Ker } f$ .  $\text{Im } f$  et  $\text{Ker } f$  sont-ils supplémentaires ?

**Exercice 57** (Thomas)

Soit  $E$  de dimension  $n$ ,  $f, g \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que  $rg(f + g) = rg(f) + rg(g) \Leftrightarrow \text{Im } f \cap \text{Im } g = \{0\}$  et  $E = \text{Ker } f + \text{Ker } g$ .

**Exercice 58** (Younes)

Soit  $n$  réels distincts  $a_1, a_2, \dots, a_n$  et  $n$  réels  $b_1, \dots, b_n$ . Montrer qu'il existe un unique polynôme de degré inférieur ou égal à  $n - 1$  tel que pour tout  $i$ ,  $P(a_i) = b_i$ . Soit  $c_1, \dots, c_n$   $n$  réels. Montrer qu'il existe un unique polynôme de degré inférieur ou égal à  $2n - 1$  tel que  $\forall i \in [1, n], P(a_i) = b_i$  et  $P'(a_i) = c_i$ . On pourra considérer l'application linéaire de  $R_{2n-1}[X]$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$  définie par  $f(P) = (P(a_1), \dots, P(a_n), P'(a_1), \dots, P'(a_n))$  et prouver son injectivité.

**Exercice 59** (Florian)

Soit  $E$  de dimension finie,  $f$  et  $g$  des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ . Montrer que  $|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)| \leq \operatorname{rg}(f + g) \leq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$ .

**Exercice 60** (Anne-Sophie)

Soit  $F$  et  $G$  deux sev de  $E$ . Soit  $f : F \times G \rightarrow F + G$  définie par  $f((a, b)) = a + b$ . Montrer que  $f$  est linéaire, surjective et que  $\operatorname{Ker} f = F \cap G$ . En déduire que si  $F$  et  $G$  sont de dimension finie,  $F + G$  également et  $\dim(F + G) + \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G$ .

**Exercice 61** (Tiphaine)

Soit  $E$  de dimension finie. Montrer que deux des trois propriétés suivantes entraînent la troisième : 1.  $F \cap G = \{0\}$ , 2.  $F + G = E$  et 3.  $\dim F + \dim G = \dim E$ .

**Exercice 62** (Tiphaine)

Soit  $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = z \text{ et } y + z + t = 0\}$  et  $G = \operatorname{Vect}\{(1, 1, 2, 1)\}$ . La somme  $F + G$  est-elle directe ?

**Exercice 63** (Hugo)

Soit  $f : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(P) = P(\alpha)$ ,  $\alpha$  un réel fixé. Montrer que  $f$  est une application linéaire. Déterminer  $\operatorname{Ker} f$  et  $\operatorname{Im} f$ . Répondre aux mêmes questions pour  $g : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_1[X]$  définie par  $g(P) = P(\alpha)X + P(\beta)$ .

**Exercice 64** (Nathaniel)

Soient  $u, v \in \mathcal{L}(E)$ ,  $E$  de dimension finie. Montrer que  $\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) - \dim E \leq \operatorname{rg}(u \circ v) \leq \min\{\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v)\}$ .

**Exercice 65** (Aurélien)

Soit  $E$  de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$  qui vérifie  $u^2 = -\operatorname{Id}$ . Montrer que  $u$  est bijective et que  $\dim E$  est paire.

**Exercice 66** (Laura)

Soit  $(x, y, z)$  une famille libre de  $E$ . On pose  $u = y + z$ ,  $v = z + x$  et  $w = x + y$ . Montrer que la famille  $(u, v, w)$  est libre.

**Exercice 67** (Emeline)

On pose  $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, 3x + 4y - 2z = 0\}$ . Montrer que  $E$  est un sev de  $\mathbb{R}^4$ . Déterminer une famille génératrice de  $E$  puis la dimension de  $E$ .

**Exercice 68** (Mathilde)

Soit  $(a, b, c) \in (\mathbb{R}^*)^3$ . Pour  $\alpha$  réel on définit la fonction  $\varphi_\alpha : x \mapsto \sin(\alpha + x)$ . Montrer que  $\{\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c\}$  est une famille liée. Déterminer la dimension de  $\operatorname{Vect}\{\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c\}$ .