

Sujets de colles - Dérivabilité, convexité

MPSI 1 - Lycée Descartes

Exercice 1 (Jean-Baptiste)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et bornée telle que $f'(x) \rightarrow l$ en $+\infty$. Montrer que $l = 0$.

Exercice 2 (Xavier)

Soit f continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer qu'il existe une tangente à la courbe C_f passant par $(d, 0)$ si $d \notin [a, b]$.

Exercice 3 (Sébastien)

Soit f continue sur $[a, b]$ telle que

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Montrer que f est convexe.

Exercice 4 (Jean-Jacques)

Soit $f : t \mapsto (t^2 - 1)^n$. Montrer que

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, f^{(k)}(1) = f^{(k)}(-1) = 0.$$

Calculer $f^{(n)}(1)$ et $f^{(n)}(-1)$. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins n fois sur $] -1, 1[$.

Exercice 5 (Martin)

Soit $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$. Montrer que (u_n) admet une limite finie.

Soit $f : [0, +\infty[$ dérivable telle que $f(0) = 0$. Montrer que $f\left(\frac{1}{n+1}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{2n}\right)$ converge vers $lf'(0)$. On pose $f(x) = \ln(1+x)$. Déterminer l .

Exercice 6 (Anthony)

Soit f dérivable telle que $f'(x) \rightarrow l$ en $+\infty$. Montrer que $\frac{f(x)}{x} \rightarrow l$ en $+\infty$.

Exercice 7 (Benjamin P)

Soit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et que $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$ avec $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$. Donner une relation de récurrence entre P_{n+1}, P_n, P'_n puis entre P_{n+1}, P_n, P_{n-1} . Préciser $P_n(0)$ et montrer que $P'_n = -n^2 P_{n-1}$.

Exercice 8 (Marius)

Etudier la suite définie par récurrence par $u_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} \sin \frac{1}{u_n}.$$

Exercice 9 (Julien)

Soit $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$. Montrer que

$$\ln(\ln(p+1)) - \ln(\ln(p)) \leq \frac{1}{p \ln p}.$$

En déduire la limite de la suite définie par $u_n = \sum_{p=2}^n \frac{1}{p \ln p}$.

Exercice 10 (Alexandre)

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$. Soit

$I = \left[\frac{3}{2}, 2\right]$ et f définie sur I par $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Montrer que $f(I) \subset I$. Montrer que f admet un unique point fixe l sur I et le calculer. Montrer que

$$\forall n \geq 1, \left| \frac{f(u_n) - f(l)}{u_n - l} \right| \leq \frac{4}{9}.$$

En déduire que (u_n) converge vers l .

Exercice 11 (Matthieu V)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $x_0 \in I$. Trouver la limite éventuelle en x_0 de $x \mapsto \frac{xf(x_0) - x_0f(x)}{x - x_0}$.

Exercice 12 (Florian)

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $\forall x \in [0, +\infty[, f'(x) > 0$. Montrer que $\forall x > 1, f(x+1) - f(x) \leq f'(x) \leq f(x) - f(x-1)$. On pose $u_n = \sum_{k=1}^n f'(k)$. Encadrer

u_n à l'aide de $f(n+1)$ et $f(n)$. Donner le sens de variation de (u_n) et $(f(n))$.

Exercice 13 (Benjamin H)

Soit $P(x) = x(x-1)\dots(x-n)$. Montrer que P' est un produit de polynômes réels de degré 1.

Exercice 14 (Laure)

Montrer que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi} x \leq \sin x \leq x$. Donner un encadrement semblable pour la fonction tangente sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Exercice 15 (Charles)

Trouver les fonctions définies sur \mathbb{R} , dérivables en 0 telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = 2f(x)$.

Exercice 16 (Erwan)

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$ distincts deux à deux tels que $\sum_{k=1}^n f'(x_k) = n$.

Exercice 17 (Antoine)

Soit f dérivable sur $[a, b]$ telle que $f(a) = f(b)$ et $f'(a) = 0$. Montrer que $\exists c \in]a, b[, f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$.

Exercice 18 (Matthieu L)

Soit $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = f'(0) = f(a) = 0$. Montrer qu'il existe un point M de \mathbb{C}_f autre que O (l'origine) tel que la tangente en M à \mathbb{C}_f passe par O .

Exercice 19 (Aude)

Soit $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$ tel que $\forall x \in]a, b[, g'(x) \neq 0$. Montrer que $g(b) - g(a) \neq 0$ et $\exists c \in]a, b[, \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$. On pourra utiliser une fonction $x \mapsto f(x) - \lambda g(x)$ avec λ un réel à déterminer.

Exercice 20 (Reda)

Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que $x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ convexe si et seulement si $x \mapsto xf(x)$ est convexe.

Exercice 21 (Laure)

Montrer que $D^n \left(x^{n-1} e^{\frac{1}{x}} \right) = (-1)^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}$.

Exercice 22 (Elodie)

Etudier f définie par $f(x) = \arctan \frac{x}{x+1} + \arctan \frac{x}{x-1} - \arctan \frac{1}{2x^2}$.

Exercice 23 (Julien B)

Calculer la dérivée de $f : x \mapsto \arctan \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$. Interpréter.

Exercice 24 (Georges)

On pose $y(x) = \arctan x$. Montrer que $\forall n \geq 1, y^{(n)}(x) = (n-1)! \cos^n y \sin\left(ny + \frac{n\pi}{2}\right)$.

Exercice 25 (Erwan)

Montrer que f définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = -\ln(\ln(x))$ est convexe. En déduire que $\forall (x, y) \in]1, +\infty[^2, \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln x \ln y}$.

Exercice 26 (Martin)

Montrer que $f : x \mapsto \ln(1 + e^x)$ est convexe. Soient x_1, \dots, x_n n réels strictement positifs. Montrer que $1 + (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 27 (Pierre-Olivier)

Trouver a et b tels que $\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 1}$. En déduire $f^{(n)}$ où $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

Exercice 28 (Thomas)

Soit $g : x \mapsto \frac{1}{1 + x^2}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists P_n \in \mathbb{R}[X], f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1 + x^2)^{n+1}}$.

Exercice 29 (Aurélien)

Sur quelles parties de $\mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x^2 - x^3}$ est-elle continue et dérivable.

Exercice 30 (Aurélien)

Calculer la dérivée n -ième de $x \mapsto \cos^3 x$.