Sujets de colles - Nombres complexes

MPSI 1 - Lycée Descartes

Exercice 1
Simplifier le nombre complexe $z = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

Exercice 2
Module et argument de $a = \dfrac{(1+i\tan\theta)^2}{1+\tan^2\theta}$ et $b = \dfrac{1-\cos\theta+i\sin\theta}{1+\cos\theta-i\sin\theta}$.

Exercice 3
Résoudre $27(z-1)^6+(z+1)^6=0$.

Exercice 4
Soit $A(1), B(3+2i), C(i(2-\sqrt{3})), D(1+\sqrt{3}+i$. A, B, C et D sont ils cocycliques ?

Exercice 5
Trouver z tel que $A(1), B(z), C(\frac{1}{z})$ soient alignés.

Exercice 6
Résoudre $(z+1)^n = e^{2in\alpha}$. Calculer $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)$.

Exercice 7
Trouver z tel que $A(1), B(z), C(z^2)$ alignés puis tel que ABC forme un triangle rectangle.

Exercice 8
Résoudre $iz^2+iz+1+i=0$.

Exercice 9
Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos(kx}{(\cos x)^k}$.

Exercice 10
Trouver z tel que $\dfrac{z-1-i}{z+1} \in i\mathbb{R}$. Interprétation géométrique.

Exercice 11
Résoudre $(z+1)^n = (z-1)^n$.

Exercice 12
Trouver z tel que $M(z), A(\frac{1}{z})$ et $B(z-1)$ sont sur un même cercle de centre O.

Exercice 13
Résoudre $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^n = 2\cos\alpha$ ($\alpha \in]0,\pi[$).

Exercice 14
Module et argument de $z = \dfrac{e^{i\alpha}+e^{i\beta}}{1-e^{i\alpha}e^{i\beta}}$.

Exercice 15
Forme algébrique et trigonométrique des racines complexes de $z^2 = \sqrt{3}+i$. En déduire $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 16
Résoudre $(z-i)^n = (z+i)^n$.

Exercice 17
Résoudre $z^4-(5-14i)z^2-2(5i+12)=0$.

Exercice 18
Exprimer $\cos 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$ puis sous la forme d'un polynôme en $\cos\theta$.

Exercice 19
Résoudre $(2+i)z^2-(5-i)z+2-2i=0$.

Exercice 20
Résoudre $z^2=-7+24i$.

Exercice 21
Linéariser $\sin^6\theta$.

Exercice 22
Soit $\theta \in]0,2\pi[$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin k\theta$.

Exercice 23
Résoudre $z^4 = 2-2i\sqrt{3}$.

Exercice 24
Linéariser $\cos^2 x - \sin^3 x$, $\cos^7 x$.

Exercice 25
Résoudre $2z^2-(20+9i)z+50=0$.

Exercice 26
Soit $u = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$. Calculer u^2, u^4. Déterminer

le module et un argument de u.

Exercice 27
Résoudre $z^5 = \bar{z}$.

Exercice 28
Soit $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[- \{0\}$. Résoudre $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$.

Exercice 29
Résoudre $z^6 + z^3 + 1 = 0$.

Exercice 30
Soit ABC un triangle équilatéral direct de centre O. Exprimer b et c en fonction de a et $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Déterminer les complexes a tels que a^3 soit le milieu de $[BC]$.

Exercice 31
Soit $|z| = |z'| = 1$. Montrer que $\frac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbb{R}$.

Exercice 32
Calculer la somme et le produit des racines n-ièmes de l'unité.

Exercice 33
Résoudre $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$, $(2+i)z^2 - (3+2i)z + 1 - \frac{i}{2} = 0$.

Exercice 34
Trouver z tel que $M(z), A(z^2), B(z^3)$ forme un triangle rectangle.

Exercice 35
Déterminer la nature et les éléments géométriques de l'application $f : z \mapsto \left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right) z - 1$.

Exercice 36
Résoudre $z^7 = 1$. Soit $u = a + ib$ avec $a = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$ et $b = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{6\pi}{7}$. Calculer $u + \bar{u}$ et $u\bar{u}$. En déduire les valeurs de a et b.

Exercice 37
Soit $\alpha \in [-\pi, \pi[$. Résoudre $2(1-\cos 2\alpha)z^2 - (2\sin 2\alpha)z + 1 = 0$. Déterminer le module et un argument de chaque solution.

Exercice 38
Résoudre $\left(\frac{1+iz)}{1-iz}\right)^n = e^{i\alpha}$.

Exercice 39
Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, $c = \frac{a-b}{1-\bar{a}b}$. Montrer que $|c| = 1 \iff |a| = 1$ ou $|b| = 1$.

Exercice 40
Résoudre $z^8 = \frac{1-i}{\sqrt{3}-i}$.

Exercice 41
Résoudre $z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 100 = 0$.