Sujets de colles - Arithmétique

MPSI 1 - Lycée Descartes

Exercice 1 (Mathilde)
Bruce Willis dispose de 2 bassines de trois litres et cinq litres et d'un robinet. Comment faire pour obtenir 1 litre et empêcher la bombe d'exploser. Même question avec des bassines de 47 et 17 litres, et avec des bassines de 6 litres et 111 litres.

Exercice 2 (Mathilde)
L'équation $x^3 + x^2 + 2x + 1$ admet-elle des solutions rationnelles ?

Exercice 3 (Richard)
Calculer $a \wedge b$ et $a \vee b$ si $a = 10000$ et $b = 15^{10}$ puis si $a = n$ et $b = 2n + 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4 (Richard)
Soit m impair, $m \geq 3$. Factoriser $a^m + b^m$. En déduire que si $q \in \mathbb{N}^*$ et $2^q + 1$ est premier alors $q = 2^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 (Emeline)
Trouver les entiers u et v tels que $119u + 52v = 1$.

Exercice 6 (Emeline)
Soit $a, n \in \mathbb{N}^*$, $a \geq 2$. Montrer que si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$ et n est premier.

Exercice 7 (Elodie)
Trouver les entiers x et y tels que $x \vee y = 60$ et $x \wedge y = 5$.

Exercice 8 (Julien)
Soient a et b premiers entre eux. Montrer que $a+b$ et ab sont premiers entre eux.

Exercice 9 (Youssef)
Montrer que $n + 1$ et $2n + 1$ sont premiers entre eux puis que $n + 1$ divise $\binom{2n}{n}$.

Exercice 10 (Ghali)
Résoudre $x \vee y = x + y - 1$.

Exercice 11 (Benjamin H)
Soient a et b distincts et premiers entre eux. On pose $d = (a^3 - b^3) \wedge (a - b)^3$. Montrer que $(a - b)^2$ et ab sont premiers entre eux. Soit p premier tel que p divise $(a^2 + ab + b^2$ et $(a - b)^2$. Montrer que $p = 3$. Montrer que si 3 ne divise pas $(a - b)$ alors $d = a - b$. Montrer que si 3 divise $a - b$ alors $d = 3(a - b)$.

Exercice 12 (Anne-Sophie)
Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$: $xy = 2x + 3y$.

Exercice 13 (Anne-Sophie)
Soit $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*$ et q le quotient de la division euclidienne de $a - 1$ par b. Déterminer pour $n \in \mathbb{N}$ le quotient de la division euclidienne de $(ab^n - 1)$ par b^{n+1}.

Exercice 14 (Tiphaine)
Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$: $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{5}$.

Exercice 15 (Tiphaine)
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1) \wedge (2n+1) = 1$. En déduire que $(n+1)$ divise $\binom{2n}{n}$

Exercice 16 (Reda)
Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$: $x^2 - y^2 - 4x - 2y = 5$.

Exercice 17 (Reda)
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n^2 + n) \wedge (2n+1) = 1$ et $(3n^2 + 2n) \wedge (n + 1) = 1$.

Exercice 18 (Laura)
Montrer que $(a + b) \wedge (a \vee b) = a \wedge b$. Résoudre $\begin{cases} a \vee b = 420 \\ a + b = 144 \end{cases}$.

Exercice 19 (Kévin)
Soit $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{b-1} E\left(\frac{a + k}{b}\right) = a$.

Exercice 20 (Hugo)
Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $51x + 44y = 1$.

Exercice 21 (Nazim)
Trouver les triplets $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tels que $a \vee b = 42, a \wedge c = 3$ et $a + b + c = 29$.

Exercice 22 (Anthony)
Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :$35x + 20y = 14$ et $35x + 20y = 15$.

Exercice 23 (Anthony)
Soient $(a, b) \in \mathbb{Z}$. Montrer que $a \wedge b = 1 \iff (a + b) \wedge ab = 1$.

Exercice 24 (Laurent)
Déterminer les entiers $1 \leq n \leq 105$ sachant que les restes des divisions euclidiennes de n par $3, 5, 7$ sont respectivement $1, 2, 3$.

Exercice 25 (Laurent)
Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$: $x \wedge y = 18$ et $x \vee y = 540$.

Exercice 26 (Charles)
Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$: $\begin{cases} a \wedge b = 24 \\ a + b = 1008 \end{cases}$.

Exercice 27 (Charles)
Démontrer que $756 \wedge 535 = 1$ et trouver u et v tels que $756u + 535v = 1$.

Exercice 28 (Erwan)
Résoudre dans $\mathbb{N}^2$: $\begin{cases} a \wedge b = 17 \\ ab = 10115 \end{cases}$

Exercice 29 (Kévin A)
Montrer que si $n \notin \{1, 4\}$, $9 | u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 k!$.

Exercice 30 (Kévin A)
Résoudre le système $\begin{cases} x + y = 56 \\ x \vee y = 105 \end{cases}$.

Exercice 31 (Victor)
Soient $a = 62, b = 42$. Déterminer $\delta = a \wedge b$ puis u et v tels que $au + bv = \delta$.

Exercice 32 (Victor)
Résoudre $\begin{cases} x \wedge y = 12 \\ x \vee y = 420 \\ x > y > 20 \end{cases}$.

Exercice 33 (Aude)
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 9 | (2^{2n} + 15n - 1)$.

Exercice 34 (Aude)
Résoudre $x \wedge y + x \vee y = x + y$.

Exercice 35 (Pierre-Olivier)
Déterminer la puissance de 2 dans la décomposition en facteurs premiers de $100!$.

Exercice 36 (Aurélien)
Soit $a_n = 2.10^n + 1$. Montrer que $a_n \wedge a_{n+1} = a_n \wedge 9 = 3$.

Exercice 37 (Alexandre)
Résoudre $x \vee y + 3(x \wedge y) = 136$.