

## Feuille d'exercices 2 - Fonctions usuelles et nombres complexes - MPSI 1 - 2006-2007

### Exercice 1

Linéariser  $\sin^5(x)$  (réponse :  $\sin^5(x) = \frac{1}{16}(\sin(5x) - 5 \sin(3x) + 10 \sin(x))$ )

### Exercice 2

Soit  $w_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ ,  $0 \leq k \leq n-1$  les racines  $n$ -ièmes de 1. Calculer pour  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $\sum_{k=0}^{n-1} (w_k)^p$  et  $\prod_{k=0}^{n-1} w_k$ .

### Exercice 3

1. Montrer que pour tout  $t \in ]0, 1]$ ,  $\arctan \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} = \arccos t$
2. Montrer que pour tout  $t \in [-1, 1]$ ,  $\arccos \sqrt{\frac{1+t}{2}} = \arccos t$

### Exercice 4 - Suite harmonique

Pour  $n \geq 1$  on pose  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

1. Montrer que pour tout  $n \geq 1$ ,  $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$  (on écrira  $\ln(n+1) - \ln(n)$  sous la forme d'une intégrale)
2. En déduire un encadrement de  $H_n$
3. Montrer que  $\frac{H_n}{\ln(n)} \rightarrow 1$

### Exercice 5

Etudier la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$

### Exercice 6

1. Calculer  $\arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{2}{3}$
2. Calculer  $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8}$

### Exercice 7

Montrer que  $\forall x \geq 0$ ,  $\arccos \frac{1}{\cosh x} = \arctan(\sinh x)$

### Exercice 8

Exprimer  $\operatorname{argsh} \frac{1}{x}$  à l'aide de la fonction  $\ln$  et des fonctions usuelles.

### Exercice 9

1. Montrer que  $\tanh(2x) = \frac{2 \tanh(x)}{1 + \tanh^2 x}$ . On pourra utiliser en les démontrant les formules suivantes :
  - (a)  $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$
  - (b)  $\sinh(2x) = 2 \cosh(x) \sinh(x)$
2. En déduire que pour  $x \neq 0$ ,  $\tanh(x) = \frac{2}{\tanh(2x)} - \frac{1}{\tanh(x)}$
3. Calculer  $\sum_{p=0}^{n-1} 2^p \tanh(2^p x)$