

Feuille d'exercices 1 - Nombres complexes - MPSI 1 - 2006-2007

Exercice 1

Soit $z \in U \setminus \{1\}$. Montrer que $\frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$

Exercice 2

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^n k \sin(kx)$

2. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos(kx)}{\cos^k x}$ en précisant pour quelles valeurs de x cette expression est bien définie.

Exercice 3

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 = \bar{z}^6$

Exercice 4

- Déterminer le lieu des points du plan d'affixe z qui sont alignés avec le point J d'affixe i et le point M' d'affixe iz
- Déterminer le lieu des points M'

Exercice 5

Montrer que 2 complexes z et z' ont même module si et seulement si

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, z + z' = \lambda i(z - z')$$

Exercice 6

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Mettre sous forme trigonométrique les complexes

$$(1 + \cos(x) + i \sin(x))^n \text{ et } \frac{(1-i)^n}{(1+i)^{n-3}}$$

Exercice 7

Soit a, b et c , 3 nombres complexes distincts d'image A, B et C. Montrer que les 3 propositions suivantes sont équivalentes :

- ABC est un triangle équilatéral
- j ou j^2 est solution de l'équation $az^2 + bz + c = 0$
- $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$
- $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = 0$

Exercice 8

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $(1 + iz)^n + (1 - iz)^n = 0$

Exercice 9

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} |e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1|$

Exercice 10

Résoudre dans \mathbb{C} les équations :

- $|z+1| = |z| + 1$
- $(1-i)z^3 + (-4+8i)z^2 + (3-25i)z + 30i = 0$
- $z^{2n} - 2z^n \cos(na) + 1 = 0$ ($a \in \mathbb{R}$)